3-2 Electrostatics in Free Space

ในที่นี้ จะศึกษาเกี่ยวกับสนามไฟฟ้าในปริภูมิเสรี (Free Space) ที่มี Permittivity เท่ากับ ε_0 หรือประมาณ $(1/36\pi)\times10^{-9} = 8.854\times10^{-12}$ (F/m)

เริ่มต้น Electric Field Intensity (ความเข้มสนามไฟฟ้า) ได้รับการกำหนดนิยามให้เป็นแรงต่อหน่วยประจุไฟฟ้า ซึ่งประจุไฟฟ้าทดสอบขนาดเล็กที่หยุดนิ่ง (very small stationary test charge) ได้รับในกรณีถูกวางในบริเวณที่มีสนามไฟฟ้า กล่าวคือ

$$\mathbf{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\mathbf{F}}{q} \text{ (V/m)} \qquad (3\text{-}1)$$

E แปรผันตรงตามแรงและมีทิศทางเดียวกับแรง และสังเกตว่า หน่วย Newton/Coulomb = V/m จาก (3-2) แรงที่กระทำต่อประจุไฟฟ้าหยุดนิ่งในสนามไฟฟ้าเท่ากับ

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} \text{ (N)} \qquad (3\text{-}2)$$

สมการพื้นฐานสำหรับ Electrostatics ใน Free space กำหนด divergence และ curl ของ Electric Field Intensity ไว้ดังนี้

$$\boxed{\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}} \qquad (3\text{-}3) \quad \text{และ} \quad \boxed{\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{0}} \qquad (3\text{-}4)$$

โดย ρ_v แสดงความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า (Volume charge density) และมีหน่วยเป็น (C/m^3) โดยนิยามของ ρ_v คือ

$$\rho_v = \lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta v} \text{ (C/m}^3\text{)}$$

เงื่อนไข (3-4) ระบุให้สนามไฟฟ้าเป็น irrotational และเงื่อนไข (3-3) ทำให้สนามไฟฟ้าไม่เป็น solenoidal (ยกเว้น ρ_v เท่ากับ 0) เงื่อนไขทั้งสองนี้เป็นสมการพื้นฐานที่แสดง Electrostatics และใช้ในการหาทฤษฎี กฎ และความสัมพันธ์ต่างๆใน Electrostatics อนึ่ง (3-3),(3-4) อยู่ในรูป differential form

เมื่อทำการหา volume integral ของทั้งสองข้างของ (3-3) ด้านขวามือ (Right-hand side; RHS) จะเท่ากับ

$$\int_V \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}dv = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

โดย Q แสดงประจุรวมในปริมาตร V และเมื่อใช้ Divergence Theorem ด้านซ้ายมือ (Left-hand side; LHS) จะเท่ากับ

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{E}dv = \oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

ดังนั้น จะได้

$$\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \quad \text{(Gauss's law)} \qquad (3\text{-}6)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อทำการหา Surface integral ของทั้งสองข้างของ (3-4) และใช้ Stokes' Theorem RHS จะเท่ากับ

$$\int_S \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

ดังนั้น จะได้

$$\boxed{\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0} \qquad (3\text{-}7)$$

ซึ่งหมายถึง “the scalar line integral of the static electric field intensity around any closed path vanishes”

(3-6),(3-7) เรียกว่า integral form ของ (3-3),(3-4) อนึ่ง สังเกตว่า แรงดันไฟฟ้าได้จากการ integrate สนามไฟฟ้า

$$V = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{(V)}$$

ดังนั้น (3-7) จึงหมายถึง Kirchhoff’s voltage law : the algebraic sum of voltage drops around any closed circuit is zero

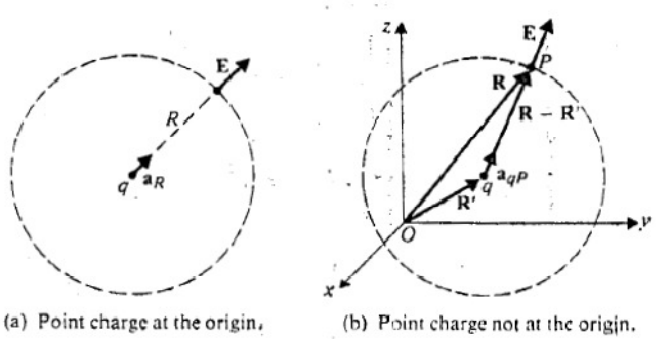
3-3 Coulomb’s Law

เมื่อพิจารณาประจุไฟฟ้าจุด (point charge) q ใน Free space ที่ไร้ขอบเขต (boundless) เมื่อเราวาดทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ตำแหน่งเดียวกับ q เนื่องจาก point charge ไม่มีทิศทางเจาะจง ทำให้สนามไฟฟ้าที่เกิดจาก point charge บนทรงกลมมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางพุ่งออกจากทรงกลม (ทิศทาง r) เมื่อใช้ (3-6) กับรูปที่ 1 (a) จะได้

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint_S (\hat{r}E_r) \cdot \hat{r} ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \text{ หรือ } E_r \oint_S ds = E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\mathbf{E} = \hat{r}E_r = \hat{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \text{ (V/m)} \qquad (3\text{-}8)$$



(a) Point charge at the origin. (b) Point charge not at the origin.

รูปที่ 1

(3-8) ทำให้รู้ว่า *the electric field intensity of a point charge is in the outward radial direction and has a magnitude proportional to the charge and inversely proportional to the square of the distance from the charge*

กรณีที่ point charge ไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด ดังแสดงในรูปที่ 1 (b) เมื่อกำหนด vector ดังรูป จะได้สนามไฟฟ้าที่จุด P ดังนี้

$$\mathbf{E}_P = \hat{a}_{qP} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

แต่เนื่องจาก $\hat{a}_{qP} = \dfrac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

$$\boxed{\mathbf{E}_P = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}} \text{ (V/m)} \qquad (3\text{-}11)$$

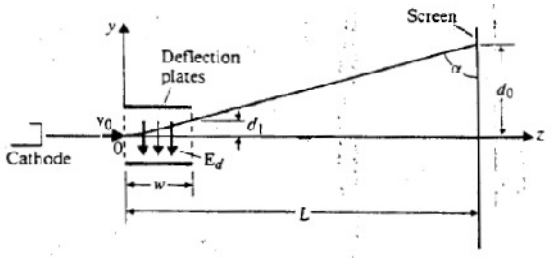
Example 3-1 Determine the electric field intensity at P(-0.2,0,-2.3) due to a point charge of +5 (nC) at Q(0.2,0.1,-2.5) in air. All dimensions are in meters.

เมื่อ point charge q_2 ถูกวางในสนามไฟฟ้าที่เกิดจาก point charge q_1 จะทำให้เกิดแรงกระทำต่อ q_2 เท่ากับ

$$\mathbf{F}_{12} = q_2\mathbf{E}_{12} = \hat{a}_{12}\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^2} \text{ (N)} \;;\; R_{12} = |\mathbf{R}_{12}| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \qquad (3\text{-}13)$$

(3-13) เป็นสมการคณิตศาสตร์แสดง Coulomb's law : *the force between two point charges is proportional to the product of the charges and inversely proportional to the square of the distance of separation.*

Example 3-2 The electrostatic deflection system of a cathode-ray oscillograph is depicted in the right figure. Electrons from a heated cathode are given an initial velocity $\mathbf{v}_0 = \mathbf{z}v_0$ by a positively charged anode. The electrons enter at $z=0$ into a region of deflection



plates where a uniform electric field $\mathbf{E}_d = -\mathbf{y}E_d$ is maintained over a width w. Ignoring gravitational effects, find the vertical deflection of the electrons on the fluorescent screen at $z=L$.

3-3.1 Electric field due to a system of discrete charges

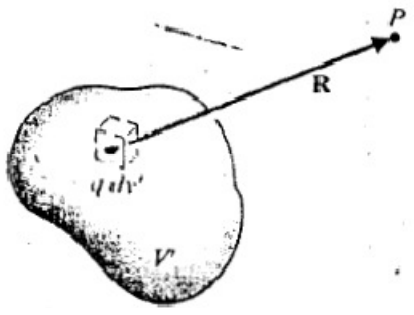
สมมุติว่า สนามไฟฟ้าถูกสร้างขึ้นจาก point charge จำนวน n ประจุ $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ที่อยู่ในตำแหน่งต่างกัน เนื่องจากความเข้มสนามไฟฟ้าเป็น linear function ของ $\mathbf{r}q/r^2$ จึงสามารถใช้ principle of superposition ได้ กล่าวคือ สนามไฟฟ้ารวมจะได้จากผลรวม vector ของสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุแต่ละอัน จาก (3-13) จะได้

$$\mathbf{E} = \frac{q_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1'|^3} + \frac{q_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2'|^3} + \cdots + \frac{q_2(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n')}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n'|^3} \text{ หรือ}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}_k')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k'|^3} \text{ (V/m)} \qquad (3\text{-}14)$$

3-3.2 Electric field due to a continuous distribution charges

สนามไฟฟ้าถูกสร้างขึ้นจากประจุที่ต่อเนื่องกันดังแสดงในรูปขวามือ สามารถหาได้จากการ integrate สนามไฟฟ้าที่เกิดจากส่วนย่อยของประจุต่อเนื่องนั้น ถ้ากำหนดให้ ρ_v แทน volume charge density (C/m^3) แล้ว สนามไฟฟ้าที่เกิดจาก qdv' จะเท่ากับ



$$d\mathbf{E} = \hat{a}_R\frac{\rho_v dv'}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

ดังนั้น

$$\mathbf{E} = \int_{V'} d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \hat{a}_R \frac{\rho_v dv'}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'} \frac{\mathbf{R}}{R^3}\rho_v dv' \text{ (V/m)}; \qquad \hat{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} \qquad (3\text{-}16)$$

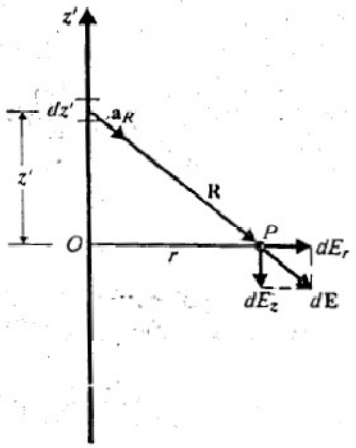
กรณีที่เป็นประจุต่อเนื่องบนพื้นผิวที่มี surface charge density ρ_s (C/m^2) (3-16) จะเปลี่ยนเป็น

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'} \hat{a}_R \frac{\rho_s ds'}{R^2} \text{ (V/m)} \qquad (3\text{-}17)$$

กรณีที่เป็นประจุต่อเนื่องบนเส้นที่มี line charge density ρ_l (C/m) (3-16) จะเปลี่ยนเป็น

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'} \hat{a}_R \frac{\rho_l dl'}{R^2} \text{ (V/m)} \qquad (3\text{-}18)$$

Example 3-3 Determine the electric field of an infinitely long, straight, line charge of uniform density ρ_l (C/m) in air

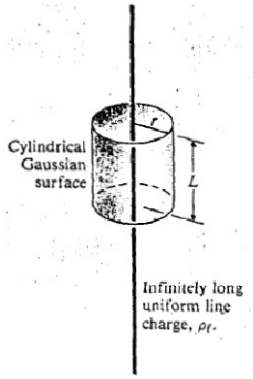


3-4 Gauss's Law and Applications

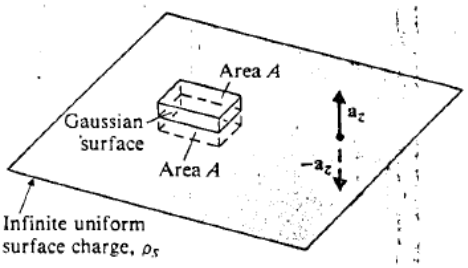
Gauss's law อยู่ในรูป integral form ที่หาได้โดยตรงจาก (3-3) ซึ่งเป็นเงื่อนไข divergence ในรูป differential form ของ Electrostatics กล่าวคือ $\boxed{\oint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$ (3-6)

Gauss's law : *the total outward flux of the* **E***-field over any closed surface in free space is equal to the total charge enclosed in the surface divided by* ε_0 โดยพื้นผิว S อาจเป็นสิ่งสมมุติขึ้น (hypothetical) หรือเป็นทางคณิตศาสตร์ (mathematical) ที่เลือกตามความสะดวก และไม่จำเป็นต้องเป็นอันเดียวกับพื้นผิวทางกายภาพ (physical surface) Gauss's law เหมาะกับปัญหาที่สนามไฟฟ้ามีลักษณะสมมาตร อันส่งผลให้ *normal component* ของสนามไฟฟ้าบนพื้นผิว (ที่เลือกให้เป็น *Gaussian Surface*) เป็นค่าคงที่ เพื่อให้สามารถทำการ integrate ด้านซ้ายมือของสมการได้

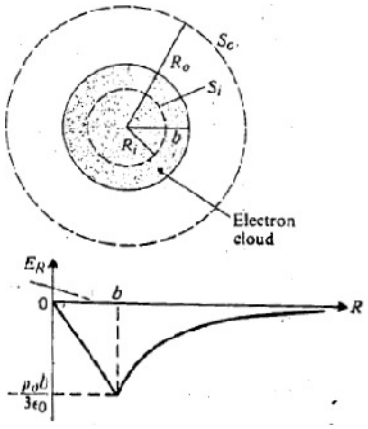
Example 3-4 Use Gauss's law for Example 3-3



Example 3-5 Determine the electric field intensity due to an infinite planar charge with a uniform surface charge density ρ_s.



Example 3-6 Determine the **E** field due to a spherical cloud of electrons with a volume charge density ρ_0 inside and 0 outside.



3-5 Electric Potential

เนื่องจาก $\nabla\times(\nabla V)\equiv\mathbf{0}$ และ $\nabla\times\mathbf{E}=\mathbf{0}$ ใน Electrostatics จึงสามารถกำหนดให้ **E** เท่ากับ

$$\mathbf{E}=-\nabla V \qquad (3\text{-}26)$$

โดย V มีชื่อเรียกว่า *Electric Potential* และเป็น Scalar เนื่องจากเมื่อกำหนดให้ W เป็นงาน (Work) สำหรับเคลื่อนประจุ q จากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 จะได้

$$\frac{W}{q}=-\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \quad \text{(J/C หรือ V)} \qquad (3\text{-}27)$$

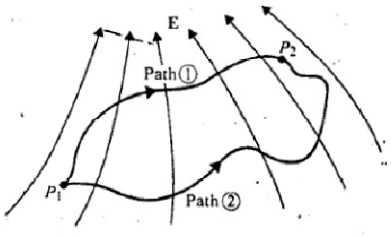
ดังนั้น Electric potential จึงหมายถึง work done in carrying a charge from one point to another in the presence of **E** ซึ่งไม่ขึ้นกับ integration path จากจุด P_1 ถึงจุด P_2 เนื่องจาก **E** เป็น conservative field

ความแตกต่างระหว่าง potential ที่จุด 2 จุด เปรียบได้กับเป็นพลังงานศักย์ในกลศาสตร์ กล่าวคือ potential difference (Electrostatic voltage) หมายถึง ความแตกต่างระหว่างพลังงานศักย์ที่จุด 2 จุดต่อหน่วยประจุ หรือ

$$V_2-V_1=-\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \quad \text{(V)} \qquad (3\text{-}28)$$

ให้สังเกตว่า $-\int_{P_1}^{P_2}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\int_{P_1}^{P_2}\nabla V\cdot\hat{\mathbf{a}}_l dl=\int_{P_1}^{P_2}dV=V_2-V_1$

และ P_1 เปรียบเสมือนเป็น reference point

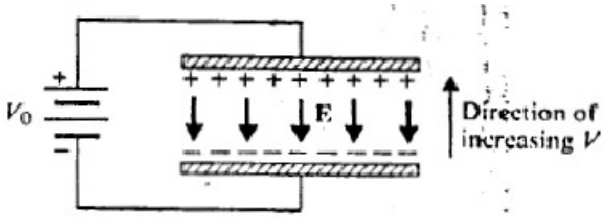


ข้อสังเกตเกี่ยวกับ Electric Potential

1. เนื่องจากเครื่องหมายลบ ทิศทางของ **E** จะตรงข้ามกับทิศทางการเพิ่มขึ้นของ V

2. ทิศทางของ ∇V ตั้งฉากกับ surfaces of constant V ดังนั้น **E** ตั้งฉากกับ equipotential lines หรือ equipotential surfaces

3-5.1 Electric Potential due to a charge distribution



เมื่อกำหนดให้ infinity เป็น reference point Electric potential จาก point charge เท่ากับ

$$V = -\int_{\infty}^{R} \hat{\mathbf{r}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{ (V)} \qquad (3\text{-}29)$$

ดังนั้น Electric potential ระหว่างจุด 2 จุดเท่ากับ

$$V_{21} = V_{P_2} - V_{P_1} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (3\text{-}30)$$

กรณีที่มี point charge จำนวน n ประจุ $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ในตำแหน่งต่างกัน

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} \text{ (V)} \qquad (3\text{-}31)$$

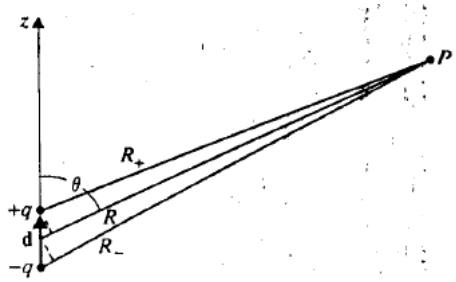
กรณีที่เป็นประจุต่อเนื่อง V เท่ากับ

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_v dv'}{R} \text{ (V/m) (volume charge)} \qquad (3\text{-}38)$$

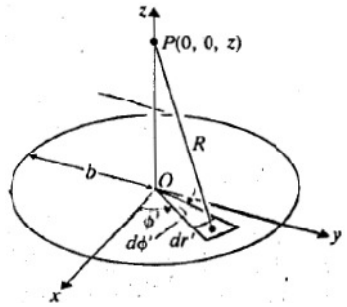
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S'}\frac{\rho_s ds'}{R} \text{ (V) (surface charge)} \qquad (3\text{-}39)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{L'}\frac{\rho_l dl'}{R} \text{ (V) (line charge)} \qquad (3\text{-}40)$$

Example 3-7 Electric potential due to an electric dipole consisting of charges $+q$ and $-q$ with a small separation of d

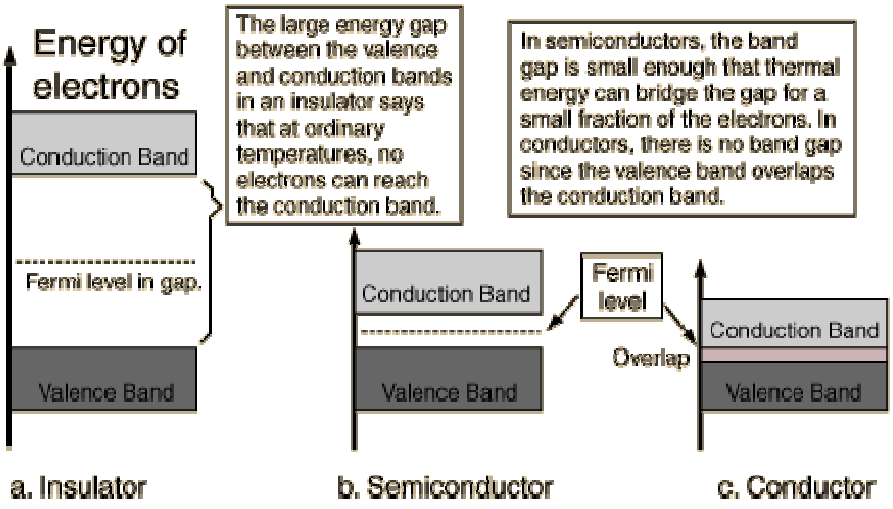


Example 3-8 Obtain a formula for the electric field intensity on the axis of a circular disk of radius b that carries a uniform surface charge density ρ_s.



3-6 Material Media in Static Electric Field

วัสดุทางไฟฟ้าที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันสามารถจำแนกได้ตามคุณสมบัติการนำไฟฟ้าได้ 3 ประเภทใหญ่ๆคือ ตัวนำไฟฟ้า ฉนวนหรือไดอิเล็กทริกส์ และสารกึ่งตัวนำ เมื่อพิจารณาจาก Energy band อันได้มาจากทฤษฎีทาง Solid State Physics จะได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 Energy band structure

3-6.1 Conductors in Static Electric Field

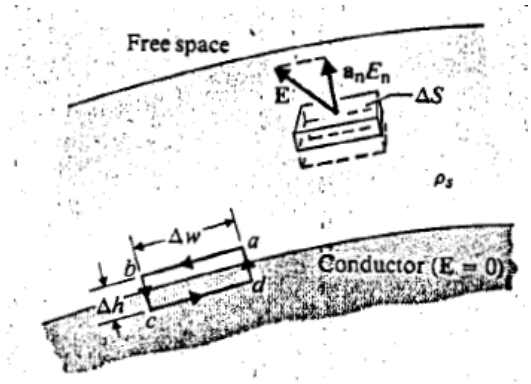
เมื่อนำประจุไฟฟ้าเข้าในตัวนำไฟฟ้า จะเกิดสนามไฟฟ้า ซึ่งส่งผลให้เกิดแรงทำให้ประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่แยกจากกัน การเคลื่อนที่นี้จะเป็นไปอย่างต่อเนื่องจนประจุทั้งหมดไปอยู่ที่พื้นผิวของตัวนำไฟฟ้า เป็นผลให้ประจุและสนามไฟฟ้าภายในตัวนำไฟฟ้าเป็น 0 กล่าวคือ

$$\rho_v = 0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

ทั้งนี้ เนื่องจากไม่มีประจุอิสระ (free charge) อยู่ในตัวนำไฟฟ้า $\rho_v = 0$ และเมื่อประยุกต์ใช้ Gauss' Law จะทำให้ได้เงื่อนไข $\mathbf{E} = \mathbf{0}$

เมื่อพิจารณาขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศ ดังแสดงในรูปที่ 2



รูปที่ 2 ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศ

ถ้าทำการหาปริพันธ์ตามเส้นทาง abcda แล้วทำการกำหนดให้ $\Delta h \to 0$ จะได้

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_{abcda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_t \Delta w = 0 \qquad \text{or}$$

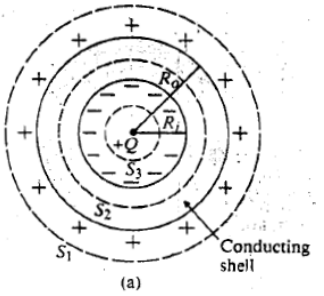
$$E_t = 0$$

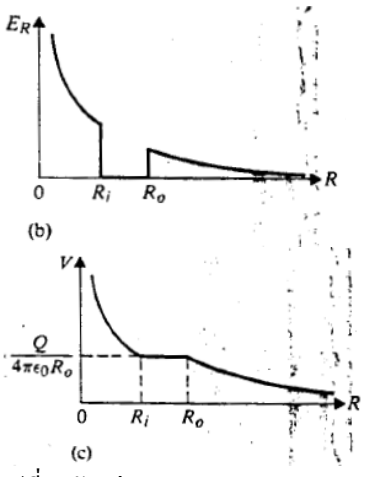
กล่าวคือ Tangential component ของ **E** เท่ากับ 0 ทำให้พื้นผิวของตัวนำไฟฟ้าเป็น Equipotential Surface

ต่อมา ถ้าทำการหาปริพันธ์บนพื้นผิวในรูป จะได้

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_n \Delta S = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \Delta S \qquad \text{or} \qquad E_n = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0}$$

ตัวอย่าง 3-9 กำหนดให้มีประจุชนิดจุดขนาด Q อยู่ที่จุดศูนย์กลางของ conducting shell ดังแสดงตามรูป 3(a) จงหา V และ **E** ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ r

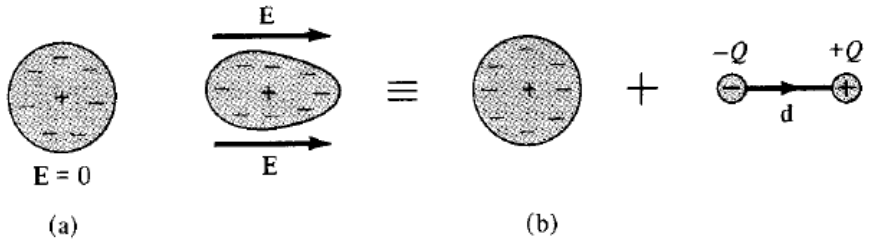




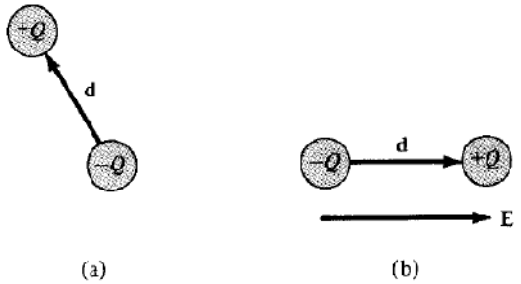
รูปที่ 3 ตัวอย่าง 3-9

3-6.2 Dielectrics in Static Electric Field

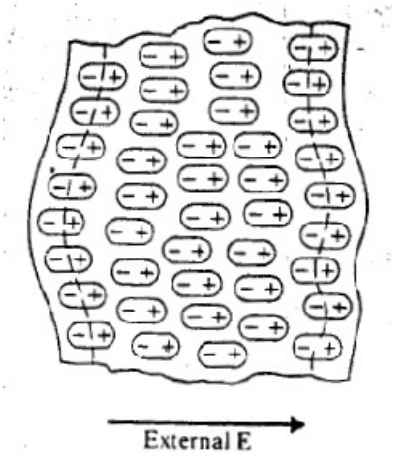
วัสดุทั้งหมดประกอบด้วยอะตอมที่มีจำนวนปะจุไฟฟ้าบวกอยู่ตรงกลาง และล้อมรอบด้วยประจุไฟฟ้าลบในจำนวนที่เท่านั้น ดังนั้น ในสภาพที่ปราศจากสนามไฟฟ้า ประจุจะอยู่ในสถานะเป็นกลาง (macroscopically neutral) เมื่อมีสนามไฟฟ้า จะเกิดการเคลื่อนที่ของประจุไปตามแรงไฟฟ้า ($q\mathbf{E}$) ส่งผลให้เกิดเป็น electric dipole moment ตามรูป 4(b) (เรียกว่า *polarization*) วัสดุเหล่านี้จะเรียกว่า *nonpolar* แต่ในวัสดุบางอย่าง จะเกิด dipole moment ถึงแม้จะไม่มีสนามไฟฟ้า เนื่องจากโครงสร้างของวัสดุ ยกตัวอย่างเช่น น้ำ จะเรียกว่าเป็นแบบ *polar* และประกอบด้วย polar molecule ซึ่งมี *permanent dipole moment* ดังแสดงในรูปที่ 5 แต่ในสภาพที่ปราศจากสนามไฟฟ้า ทิศทางของ dipole จะกระจัดกระจาย ส่งผลให้เสมือนกับ dipole moment รวมเป็น 0 (macroscopically) เมื่อมีสนามไฟฟ้า dipole จะเรียงตามทิศทางของสนามไฟฟ้า ดังแสดงในรูปที่ 5 (b) ส่งผลให้ dipole moment รวมไม่เป็น 0 ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 4 ประจุใน dielectrics



รูปที่ 5 Polar molecule



รูปที่ 6 ภายใน dielectric medium

เมื่อกำหนดนิยามของ polarization vector ***P*** ดังนี้

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{N\Delta v} \mathbf{p}_k}{\Delta v} \ (\mathrm{C/m^2})$$

โดยให้ N แสดงจำนวนของโมเลกุลต่อหน่วยปริมาตร เว็กเตอร์ **P** จะแสดง *volume density of electric dipole moment* ถ้ากำหนดให้ dipole moment ต่อหน่วยปริมาตร $d\mathbf{p} = \mathbf{P}dv'$ จะหา electric potential ที่เกิดจาก dipole moment นี้ได้จาก

$$dV = \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} dv'$$

ดังนั้น จะได้ potential ที่เกิดจาก **P** เป็น

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{R}}}{R^2} dv'$$

ในการศึกษาผลของ polarization vector มีการกำหนดนิยามของสิ่งต่อไปนี้

1. Equivalent polarization surface charge density

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n \quad (\mathrm{C/m^2})$$

2. Equivalent polarization volume charge density

เนื่องจาก

$$Q = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n ds = \int_V \left(-\nabla \cdot \mathbf{P}\right) dv = \int_V \rho_{pv} dv$$

ดังนั้น สามารถกำหนดนิยามของ polarization volume charge density ดังนี้

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (\mathrm{C/m^3})$$

สังเกตว่า ประจุรวมภายในตัว dielectric จะเท่ากับ

$$\text{total charge} = \oint_S \rho_{ps} ds + \int_V \rho_{pv} dv = \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{a}}_n ds - \int_V \left(\nabla \cdot \mathbf{P}\right) dv = 0$$

สามารถหา potential จาก ρ_{ps}, ρ_{pv} ได้โดยใช้วิธีเดียวกับการหา potential จากประจุทั่วไป

<u>ตัวอย่าง 3-10</u> กำหนดให้ polarization vector **P** เท่ากับ $\mathbf{P} = \hat{\mathbf{x}} P_0$ ของไดอิเล็กทริกส์ทรงกลมรัศมี R_0 จงหา ρ_{ps}, ρ_{pv} และประจุรวมบนพื้นผิวและในปริมาตรของไดอิเล็กทริกส์

3-7 Electric Flux Density and Dielectric Constant

ในไดอิเล็กทริกส์

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_v + \rho_{pv}\right)$$

แต่เนื่องจาก $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\right) = \rho_v$$

ในที่นี้ สามารถกำหนดนิยามของ Electric Flux Density (หรือ electric displacement) **D** ให้เป็น

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{C/m}^2)$$

ดังนั้น จะได้

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v$$

และเมื่อประยุกต์ใช้ Divergence Theorem จะได้

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho_v dv = Q$$

ดังนั้น

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad (\text{C})$$

ในกรณีที่เป็นวัสดุแบบ linear และ isotropic สามารถแสดง **P** ให้อยู่ในรูปของ **E** ได้ดังนี้

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

โดย χ_e มีชื่อเรียกว่า *electric susceptibility* และไม่มีหน่วย (dimensionless) ในกรณีนี้ สามารถแสดง **D** ดังนี้

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{C/m}^2)$$

โดย

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

มีชื่อเรียกว่า *relative permittivity* หรือ *dielectric constant* และไม่มีหน่วย

โดยทั่วไป สามารถจำแนกประเภทของไดอิเล็กทริกส์ได้ดังนี้

Linear : dielectric constant doesn't change with applied electric field ↔ *non-linear*

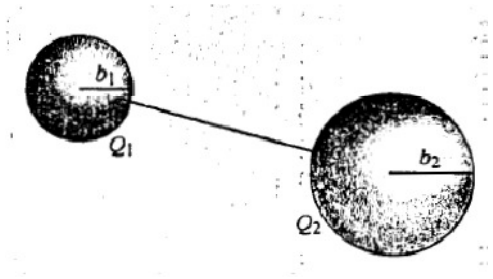
Isotropic: dielectric constant doesn't change with direction ↔ *anisotropic*

Homogeneous: dielectric constant doesn't change from point to point ↔ *inhomogeneous*

3-7.1 Dielectric Strength

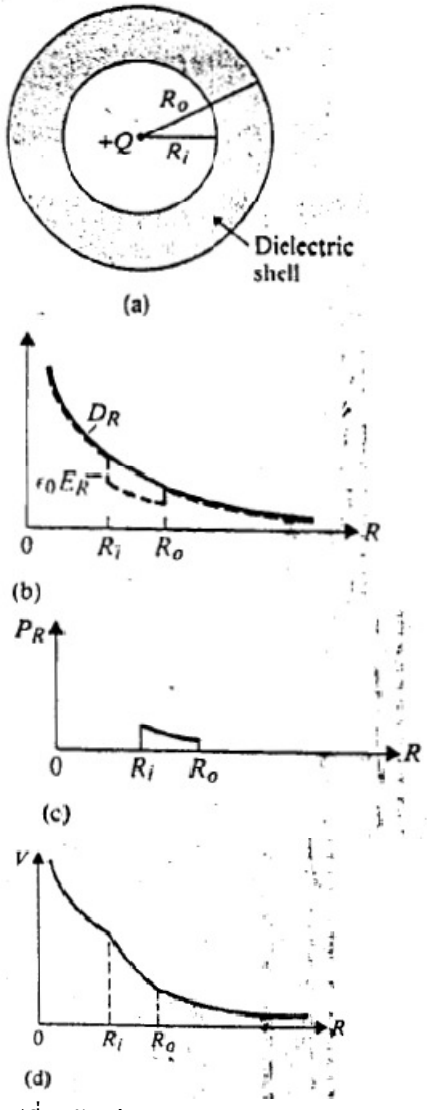
เมื่อสนามไฟฟ้าสูงมาก จะสามารถทำให้เกิด free charge และ Dielectric จะสามารถนำไฟฟ้าได้ ซึ่งเรียกว่า เกิดการ breakdown ความเข้มของสนามไฟฟ้าสูงสุดที่ dielectric สามารถทนได้ เรียกว่า *dielectric strength* (คล้าย strength of material)

ตัวอย่าง 3-11 กำหนดให้ทรงกลมสองลูกเชื่อมต่อกันโดยมีประจุดังแสดงในรูปที่ 7 ถ้ากำหนดให้ $b_1 < b_2$ และระยะห่างระหว่างทรงกลมทั้งสองยาวกว่ารัศมีเป็นอย่างมาก จนทำให้ประจุบนพื้นผิวทรงกลมกระจายแบบ uniform distribution จงหาประจุบนทรงกลม และ ***E*** บนพื้นผิวทรงกลม



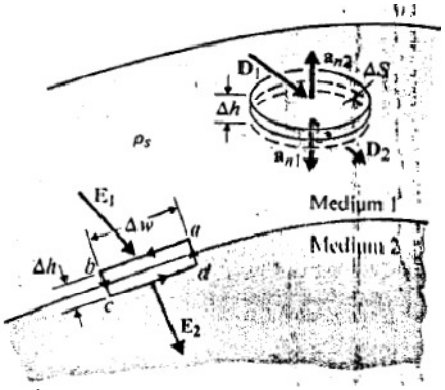
รูปที่ 7 ตัวอย่าง 3-11

ตัวอย่าง 3-9* กำหนดให้มีประจุชนิดจุดขนาด Q อยู่ที่จุดศูนย์กลางของ dielectric shell ซึ่งมี dielectric constant เท่ากับ ε_r ดังแสดงตามรูป 8(a) จงหา V,**E**,**D**,**P** ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ r



รูปที่ 8 ตัวอย่าง 3-9*

3-8 Boundary Conditions for Electrostatic Fields



รูปที่ 9 ขอบเขตระหว่างวัสดุสองอย่าง

พิจารณาขอบเขตของวัสดุสองอย่างดังแสดงในรูปที่ 9 ถ้าทำการหาปริพันธ์ตามเส้นทาง abcda แล้วทำการกำหนดให้ $\Delta h \to 0$ จะได้

$$\lim_{\Delta h \to 0} \oint_{abcda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 \Delta \mathbf{w} + E_2(-\Delta \mathbf{w}) = 0 \quad \text{or}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

กล่าวคือ Tangential component ของ ***E*** ต่อเนื่องกันที่ขอบเขต ถ้ากำหนดให้ permittivity ของวัสดุ 1 และ 2 เท่ากับ ε_1 และ ε_2 ตามลำดับ จะได้

$$\frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

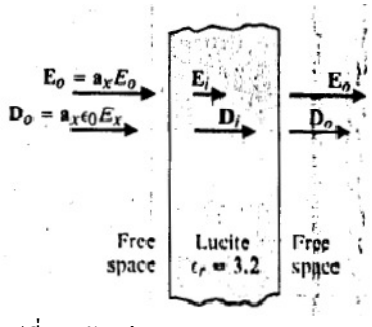
ต่อมา ถ้าทำการหาปริพันธ์บนพื้นผิวในรูป จะได้

$$\oint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{D}_1\cdot\hat{\mathbf{a}}_{n1} + \mathbf{D}_2\cdot\hat{\mathbf{a}}_{n2})\Delta S = \hat{\mathbf{a}}_{n2}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\Delta S = \rho_s \Delta S$$

ดังนั้น

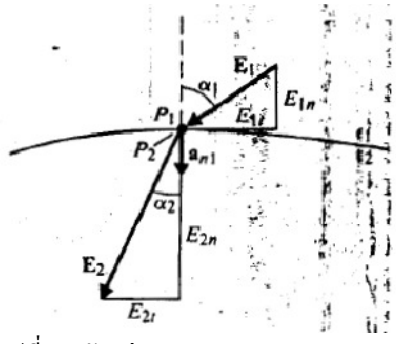
$$\hat{\mathbf{a}}_{n2}\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \quad \text{or} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \qquad (\text{C/m}^2)$$

<u>ตัวอย่าง 3-13</u> แผ่น Lucite ถูกนำเข้าในสนามไฟฟ้า $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}}E_0$ ดังแสดงในรูปที่ 10 จงหา $\mathbf{E}_i$,$\mathbf{D}_i$,$\mathbf{P}_i$ ใน Lucite



รูปที่ 10 ตัวอย่าง 3-13

<u>ตัวอย่าง 3-14</u> ขอบเขตของไดอิเล็กทริกส์ 2 ชนิดที่มี Dielectric constant เท่ากับ ε_1, ε_2 ตามลำดับ ถ้ากำหนดให้ขนาดของ **E** ที่จุด P_1 ในวัสดุ 1 เท่ากับ E_1 และทิศทางดังแสดงในรูป จงหาขนาดและทิศทางของ $\mathbf{E}_2$ ที่จุด P_2



รูปที่ 11 ตัวอย่าง 3-14

3-9 CAPACITANCES AND CAPACITORS

ตัวนำไฟฟ้าใน electrostatics เป็น equipotential body และประจุจะกระจายบนพื้นผิวในลักษณะที่ทำให้สนามไฟฟ้าภายในเป็น 0 ถ้ากำหนดให้ potential ที่ได้จากประจุ Q เท่ากับ V การเพิ่ม V ทำให้ประจุเพิ่มขึ้นตามไปด้วย กล่าวคือ อัตราส่วน Q/V เป็นค่าคงที่ ซึ่งอาจเห็นได้จาก

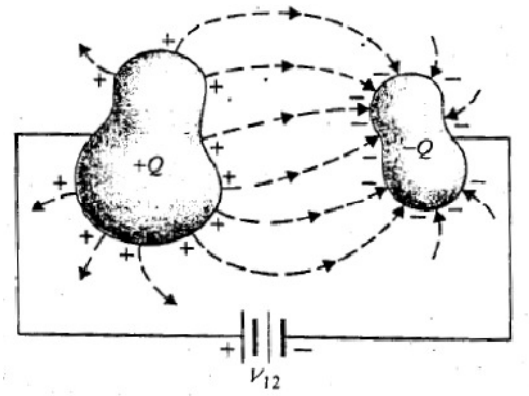
$$V = -\int \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} dn \text{ และ } kV = -\int k\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\int \frac{k\rho_s}{\varepsilon_0} dn$$

กล่าวคือ ประจุรวมจะเพิ่มขึ้น k เท่าเช่นกัน

โดยทั่วไป อัตราส่วน Q/V จะถูกแสดงด้วย Capacitance และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย C มีหน่วยเป็น Farad (หรือ C/V)

$$\boxed{Q = CV}$$

สิ่งที่ประยุกต์ใช้ Capacitance ได้แก่ ตัวเก็บประจุไฟฟ้า (Capacitor, Condenser) ดังตัวอย่างในรูปที่ 1

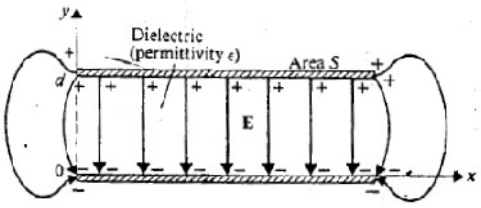


รูปที่ 1 A two-conductor capacitor

ในกรณีนี้ ตัวเก็บประจุไฟฟ้าประกอบด้วยตัวนำไฟฟ้า 2 อันที่แยกจากกันด้วย free space หรือวัสดุ dielectric เมื่อมีแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าระหว่างตัวนำไฟฟ้าทั้งสอง จะเกิด $+Q$ ที่ด้านหนึ่ง และ $-Q$ อีกด้านหนึ่ง จะสังเกตได้ว่า field line จะตั้งฉากกับพื้นผิวตัวนำไฟฟ้า ซึ่งเป็น equipotential surface ในที่นี้ ถ้ากำหนดให้แรงดันไฟฟ้าเท่ากับ V_{12} Capacitance จะสามารถแสดงได้ด้วย

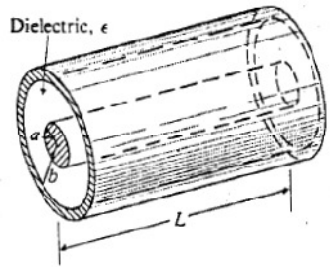
$$C = \frac{Q}{V_{12}} \text{ (F)}$$

ตัวอย่าง 3-15 parallel-plate capacitor ที่ประกอบด้วยแผ่นตัวนำไฟฟ้า 2 แผ่นที่มีพื้นที่ S และแยกจากกันด้วยวัสดุที่มี dielectric constant ε ดังแสดงในรูปที่ 2



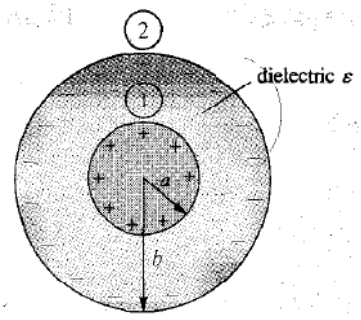
รูปที่ 2 ตัวอย่าง 3-15

ตัวอย่าง 3-16 A cylindrical capacitor



รูปที่ 3 ตัวอย่าง 3-16

ตัวอย่าง 3-16* A spherical capacitor



รูปที่ 4 ตัวอย่าง 3-16*

3-10 ELECTROSTATIC ENERGY AND FORCES

Electric potential ที่จุดหนึ่ง หมายถึง งานที่จำเป็นสำหรับการนำประจุบวกขนาดหนึ่งหน่วยจากตำแหน่งอนันต์ (reference point) มายังจุดนั้น ในการนำประจุ Q_2 จากตำแหน่งอนันต์ต้านสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุ Q_1 ใน free space ไปที่ระยะ R_{12} จะต้องใช้งานเท่ากับ

$$W_2 = Q_2V_2 = Q_2\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} = Q_1\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} = Q_1V_1$$

เนื่องจาก **E** ใน Electrostatics เป็นสนาม Conservative ทำให้ W_2 ไม่ขึ้นกับเส้นทาง (Path-independent) ให้สังเกตว่า หน่วยของงาน J = (C)(V) = (C)(J/C) งานข้างต้นนี้จะถูกเก็บในประจุทั้งสองในรูป Potential energy กล่าวคือ

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2\right)$$

ในที่นี้ ถ้ามีประจุ Q_3 ถูกเข้าจากตำแหน่งอนันต์ไปที่ตำแหน่ง R_{13},R_{23} จาก Q_1,Q_2 งานที่เพิ่มขึ้นจะเท่ากับ

$$\Delta W = Q_3V_3 = Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right)$$

ผลรวมของ ΔW กับ W_2 จะเป็น Potential energy ซึ่งจะถูกเก็บที่ประจุทั้งสาม กล่าวคือ

$$W_3 = W_2 + \Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2Q_3}{R_{23}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[Q_1\left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}}\right) + Q_2\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}} + \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right) + Q_3\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_{13}} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{23}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3\right)$$

ให้สังเกตว่า V_1 ในสมการข้างต้นเป็น potential ที่ Q_1 ที่เกิดจาก Q_1, Q_2 ในกรณีที่ประกอบด้วย N ประจุไม่ต่อเนื่อง potential energy (หรือ Electrostatic Energy) จะเท่ากับ

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} Q_kV_k \qquad \text{(J)}$$

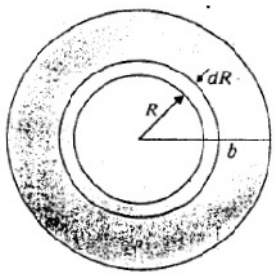
สำหรับประจุต่อเนื่อง potential energy สามารถแสดงได้ด้วย

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \rho_v V dv' \qquad \text{(J)}$$

เนื่องจากหน่วย Joule ใหญ่เกินไปสำหรับที่จะเป็นหน่วยของงานทางไฟฟ้า จึงนิยมใช้หน่วย *electron-volt* (eV) ซึ่งเท่ากับงานที่จำเป็นสำหรับเคลื่อนที่อิเล็กตรอนต้านความต่างศักย์ 1 (V) กล่าวคือ

$$1\,(\text{eV}) = 1.60\times10^{-19}\,(\text{J})$$

<u>ตัวอย่าง 3-17</u> หาพลังงานที่จำเป็นต่อการสร้างประจุทรงกลมที่มีรัศมี b และมีความหนาแน่น ρ_v



รูปที่ 5 ตัวอย่าง 3-17

3-10.1 Electrostatic Energy in Terms of Field Quantities

เนื่องจาก $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_v$, $W_e = \frac{1}{2}\int_{V'}(\nabla\cdot\mathbf{D})Vdv'$

เมื่อใช้ $\nabla\cdot(V\mathbf{D}) = V\nabla\cdot\mathbf{D} + \mathbf{D}\nabla V$ จะได้

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \nabla\cdot(V\mathbf{D})dv' - \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\nabla V dv' = \frac{1}{2}\oint_{S'} V\mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}' + \frac{1}{2}\int_{V'} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}dv'$$

เนื่องจากโดยทั่วไป $\boldsymbol{D}$ แปรผันตาม $1/r^2$ และ V แปรผันตาม $1/r$ เป็นอย่างน้อย ดังนั้น เมื่อกำหนดให้ V' เป็นทรงกลมรัศมี $r\longrightarrow\infty$ พจน์แรกของ RHS จะเป็น 0 ดังนั้น

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dv' \qquad \text{(J)}$$

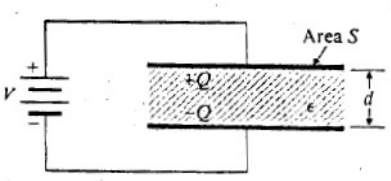
ในกรณีที่เป็น *linear, isotropic medium*

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} \varepsilon E^2 dv' \qquad \text{(J)}$$

ในที่นี้ สามารถกำหนดนิยามของ ***electrostatic energy density*** w_e ได้ดังนี้

$$w_e = \varepsilon E^2\ (\text{J/m}^3);\quad W_e = \frac{1}{2}\int_{V'} w_e dv'$$

ตัวอย่าง 3-18 A parallel-plate capacitor



รูปที่ 6 ตัวอย่าง 3-18

ตัวอย่าง 3-19 A cylindrical capacitor (รูปที่ 3)

3-10.2 Electrostatic Forces

Coulomb's law : the force between two point charges

Principle of Virtual Displacement : calculate the force on an object in a charged system from the electrostatic energy of the system

$$dW = \boldsymbol{F}_Q\cdot d\boldsymbol{l}$$

โดย dW แสดง mechanical work สำหรับเคลื่อนที่ไป $d\boldsymbol{l}$ และ $\boldsymbol{F}_Q$ แสดง total electric force เนื่องจากไม่มีพลังงานอื่นในระบบ mechanical work ต้องเท่ากับ electrostatic energy ที่เปลี่ยนไป กล่าวคือ

$$dW = -dW_e = \boldsymbol{F}_Q\cdot d\boldsymbol{l}$$

เนื่องจาก $dW_e = (\nabla W_e)\cdot d\boldsymbol{l}$

$$\mathbf{F}_Q = -\nabla W_e \qquad \text{(N)}$$

ตัวอย่าง 3-20 the force on conducting plates of a parallel-plate capacitor

3-11 SOLUTION OF ELECTROSTATIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

ที่ผ่านมา ได้ศึกษาเกี่ยวกับกรณีที่รู้ charge distribution แล้วหา **E, D,** *V, etc.* แต่ในปัญหาทั่วไป อาจไม่สามารถรู้ charge distribution ได้ จึงต้องแก้ปัญหาโดยการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต แล้วหาคำตอบที่ได้ตามเงื่อนไขดังกล่าว วิธีนี้เรียกว่า วิธี Boundary-value problem ซึ่งเท่ากับ differential equation + boundary conditions

3-11.1 Poisson's and Laplace's Equations

ใน Electrostatics, จะมีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v ; \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}; \mathbf{E} = -\nabla V$$

ใน linear, isotropic medium, เนื่องจาก $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, ดังนั้น

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot (-\varepsilon \nabla V) = \rho_v$$

เพราะฉะนั้น จะได้ ***Poisson's equation*** และ ***Laplace's equation*** (กรณีที่ ρ_v เท่ากับ 0) ดังต่อไปนี้

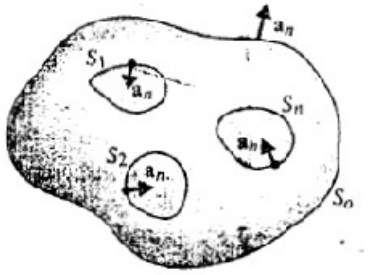
$$\boxed{(Poisson's) : \nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}}; \boxed{(Laplace's) : \nabla^2 V = 0}$$

โดย ∇^2(del square) มีชื่อเรียกว่า Laplacian operator

3-11.1* Uniqueness Theorem

Uniqueness theorem เป็นสิ่งที่กำหนดว่า มีเพียงคำตอบเดียวจากการแก้ Poisson's equation หรือ Laplace's equation

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ เป็นพื้นผิวรอบตัวนำไฟฟ้า และ S_0 เป็นพื้นผิวรอบปริมาตร V ดังแสดงในรูปที่ 7



รูปที่ 7 proof of Uniqueness theorem

สมมุติว่ามีคำตอบเกิน 1 คำตอบ โดยกำหนดให้เป็น V_1 และ V_2 ซึ่งคำตอบทั้งสองจะต้องเป็นคำตอบของ Poisson's equation ในปริมาตร V

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}; \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

และได้ตามเงื่อนไขขอบเขต กล่าวคือ V_1, V_2 ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขตที่ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ และ S_0 ในที่นี้ ถ้ากำหนดให้ $V_d = V_1 - V_2$ จะได้

$$\nabla^2 V_d = 0\big|_{\text{in } V}; V_d = 0\big|_{\text{in } S_1,\ldots,S_n}$$

เมื่อใช้ $\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\nabla f$ และกำหนดให้ $f = V_d$, $\boldsymbol{A} = \nabla V_d$ จะได้

$$\nabla \cdot (V_d \nabla V_d) = V_d \nabla \cdot (\nabla V_d) + (\nabla V_d) \cdot (\nabla V_d) = V_d \nabla^2 V_d + |\nabla V_d|^2 = |\nabla V_d|^2$$

ทำการหาปริพันธ์ของทั้งสองข้างของสมการข้างต้น จะได้

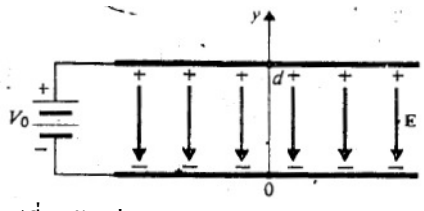
$$\int_V \nabla \cdot (V_d \nabla V_d) dv = \oint_S (V_d \nabla V_d) \cdot d\boldsymbol{s} = \int_V |\nabla V_d|^2 dv$$

เนื่องจาก V_d เท่ากับ 0 บน $S_1, S_2, \ldots, S_n$ และบน S_0

$$r \to \infty; V_d \propto 1/r; \nabla V_d \propto 1/r^2; ds \propto r^2$$

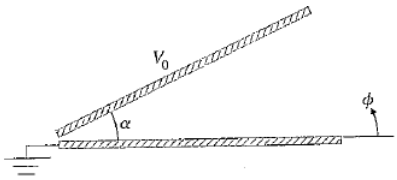
ดังนั้น ปริพันธ์ที่ได้จะต้องเป็น 0 ส่งผลให้ $|\nabla V_d|^2$ ต้องเป็น 0 และเนื่องจาก Gradient เป็น 0 ทำให้ V_d ต้องเท่ากับ V_d บน $S_1, S_2, \ldots, S_n$ กล่าวคือ ต้องเท่ากับ 0 เช่นกัน ดังนั้น $V_1 = V_2$ และสรุปได้ว่า มีได้เพียงคำตอบเดียว

<u>ตัวอย่าง 3-21</u> parallel conducting plates separated by d with $\rho_v = -\rho_0 y/d$



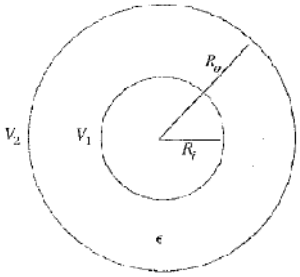
รูปที่ 8 ตัวอย่าง 3-21

<u>ตัวอย่าง 3-22</u> Two infinite insulated conducting plates maintained at potentials 0 and V_0 (รูปที่ 9) จงหา potential distribution บริเวณ $0 < \phi < \alpha$ และ $\alpha < \phi < 2\pi$



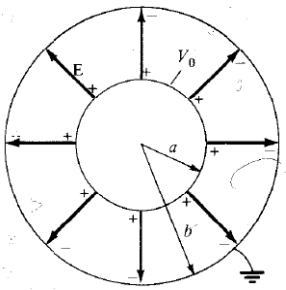
รูปที่ 9 ตัวอย่าง 3-22

ตัวอย่าง 3-23



รูปที่ 10 ตัวอย่าง 3-23

ตัวอย่าง 3-16** A spherical capacitor

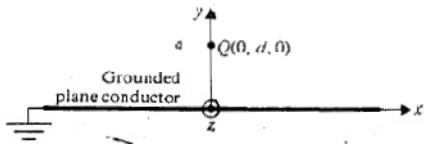


รูปที่ 11 ตัวอย่าง 3-16**

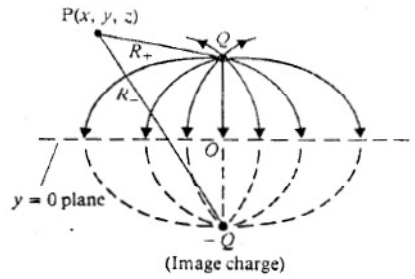
3-11.5 Method of Images

วิธีนี้ เป็นการแทนที่เงื่อนไขขอบเขตด้วย *Images* ที่เหมาะสม เพื่อทำให้ง่ายต่อการแก้ปัญหา โดยไม่ต้องทำการแก้ Poisson's equation หรือ Laplace's equation

ตัวอย่าง 3-24 Point Charges Near Conducting Planes ดังแสดงในรูป (a)



(a) Physical arrangement



(b) Image charge and field lines

รูปที่ 12 ตัวอย่าง 3-24

เนื่องจากรู้คำตอบกรณีที่ไม่มี Grounded plane conductor ในที่นี้ จึงพยายามหาคำตอบโดยแทนที่ conductor ด้วย image charge ที่เหมาะสม ในที่นี้ จะแทนที่ด้วยประจุ $-Q$ ที่ $(0,-d,0)$ ซึ่งจะได้

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

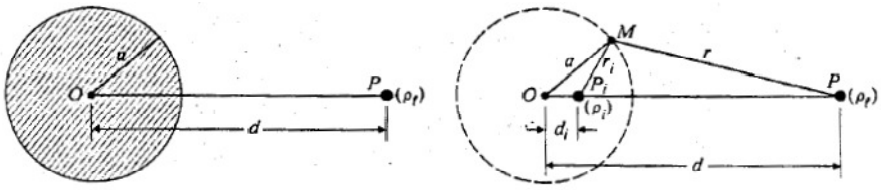
$$= \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y-d)^2+z^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+(y+d)^2+z^2}}\right] & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$ สังเกตว่า

จะได้ตามเงื่อนไข $V=0$ ที่ $y=0$ $\boldsymbol{E}$ ที่ $y\geq 0$ จะหาได้จาก

$$\mathbf{E} = -\nabla V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}(y-d) + \hat{\mathbf{z}}z}{\left[x^2+(y-d)^2+z^2\right]^{3/2}} - \frac{\hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}(y+d) + \hat{\mathbf{z}}z}{\left[x^2+(y+d)^2+z^2\right]^{3/2}}\right\}$$

ดังนั้น $\rho_s = \varepsilon_0 E_y\big|_{y=0} = -\dfrac{Qd}{2\pi\left(x^2+d^2+z^2\right)^{3/2}}$

Line charge near a parallel conducting cylinder



(a) Line charge and parallel conducting cylinder. (b) Line charge and its image.

พิจารณาปัญหาในรูป (a) ในการใช้ Method of Images ให้สังเกตว่า (a) Image ควรจะอยู่ในทรงกระบอก เพื่อทำให้ระนาบ $r=a$ เป็น equipotential surface (b) Image ควรจะอยู่บนเส้น OP ในที่นี้ สิ่งที่ต้องหาคือ ρ_i, d_i (ขนาดประจุและจุด P_i) ในขั้นตอนแรกให้กำหนดค่า $\rho_i = -\rho_\ell$ จากนั้น ทำการหาค่า potential จากประจุชนิดเส้น จะได้

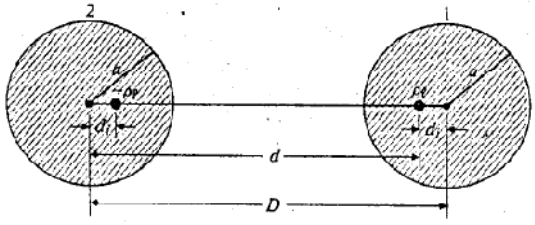
$$V = -\int_{r_0}^{r} E_r dr = -\frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r}dr = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

ดังนั้น potential ที่จุด M จะเท่ากับ potential จากประจุชนิดเส้นทั้งสอง กล่าวคือ

$$V_M = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r} - \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r_i} = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_i}{r}$$

เพื่อให้ระนาบ $r=a$ เป็น equipotential surface, r_i/r เป็นค่าคงที่ และ ΔOMP_i คล้ายกับ ΔOPM ทำให้ได้ $\angle OMP_i = \angle OPM$ ดังนั้น

$$\frac{\overline{P_iM}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP_i}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}; \text{or} \frac{r_i}{r} = \frac{d_i}{a} = \frac{a}{d} = \text{constant}$$

เพราะฉะนั้น $d_i = a^2/d$ จุด P_i มีชื่อเรียกว่า ***inverse point*** of P with respect to a circle of radius a

<u>ตัวอย่าง 3-25</u> Capacitance per unit length between two long parallel circular conducting wires of radius a