

WAVE EQUATION

ในบริเวณที่ไม่มีแหล่งกำเนิด (Source-free region) กล่าวคือ $\mathbf{J} = \mathbf{0}; \rho_v = 0$ และอยู่ในตัวกลางที่เป็น linear, isotropic (ϵ, μ)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1); \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2)$$

เมื่อหา Curl ของ (1) จะได้

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} = -j\omega\mu(j\omega\epsilon\mathbf{E}) = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}$$

เมื่อใช้ $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ จะได้

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E} = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}$$

ดังนั้น

$$\nabla^2\mathbf{E} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} = \mathbf{0} : \text{vector Helmholtz's equation (vector wave equation)}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อหา Curl ของ (2) จะได้

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = j\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\epsilon(-j\omega\mu\mathbf{H}) = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ } \nabla^2\mathbf{H} + \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

Maxwell ได้ตั้งสันนิษฐานจาก Vector Helmholtz's equation ข้างต้นว่า มีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แพร่กระจายได้ ซึ่งได้รับการพิสูจน์ด้วยการทดลองโดย Hertz

SOLUTION OF WAVE EQUATION

โดยทั่วไป กำหนดให้ wavenumber k เท่ากับ

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon \rightarrow k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}; v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน สมการคลื่นจะสามารถแสดงได้โดย

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

ซึ่งสามารถแยกเป็นส่วนประกอบ x, y, z ได้เป็น

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_x = 0; \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_y = 0; \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_z = 0$$

สมการข้างต้นมีชื่อเรียกว่า scalar wave equations

เมื่อสันนิษฐานให้สามารถใช้วิธี Separation of Variables ได้ จะสามารถแสดง E_x ให้อยู่ในรูป

Uniform Plane Wave note

$$E_x(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$$

เมื่อนำสมการข้างต้นไปแทนค่าใน scalar wave equation สำหรับ E_x จะได้

$$gh \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + fh \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + fg \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + k^2 fgh = 0 \rightarrow \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

เพื่อให้มีคำตอบที่ถูกต้องสำหรับทุกตำแหน่ง กล่าวคือ $\forall x, \forall y, \forall z$ แต่ละพจน์จะต้องเป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -k_x^2; \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -k_y^2; \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -k_z^2; k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

เมื่อแก้สมการอนุพันธ์ข้างต้น จะได้คำตอบทั่วไปดังนี้

$$f_1(x) = A_1 e^{-jk_x x} + A_2 e^{jk_x x} \text{ (traveling wave); } f_2(x) = B_1 \cos k_x x + B_2 \sin k_x x \text{ (standing wave)}$$

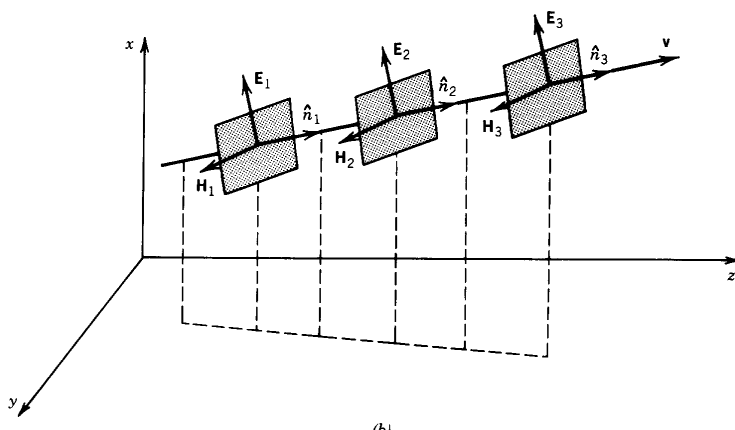
และได้คำตอบรูปคล้ายกันสำหรับ $g(y)$ และ $h(z)$ เมื่อนำคำตอบที่ได้ทั้งหมดมารวมกัน แล้วใช้เงื่อนไขขอบเขตในการหาค่าคงที่ ก็จะได้คำตอบที่สมบูรณ์

7-2 UNIFORM PLANE WAVE

จากคำตอบของสมการคลื่น สามารถแสดงคำตอบให้อยู่ในรูป

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}; \mathbf{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z; \mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$$

โดย $\mathbf{k} = k\hat{k}$ แสดง wavenumber vector และ $\hat{k}$ แสดงทิศทางการแพร่กระจาย (Propagation Direction) $\mathbf{r}$ เป็นเวกเตอร์แสดงตำแหน่ง $\mathbf{E}_0$ เป็นเวกเตอร์คงที่ กล่าวคือ ไม่เปลี่ยนแปลงตามตำแหน่ง ดังนั้น สนามไฟฟ้านี้มีขนาดคงที่ (uniform) และเปลี่ยนเฉพาะเฟส ซึ่งระนาบเฟสคงที่ (constant phase plane) จะมีลักษณะเป็นระนาบเรียบ (plane) และขนานกัน จึงเรียกว่า *Uniform Plane Wave* อนึ่ง ค่าคงที่ k อาจถูกเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า *Propagation constant*



รูปที่ 1 Phase front ของ Uniform plane wave

พิจารณา $\mathbf{E} = \hat{x}E_0 e^{-jkz}; \mathbf{k} = \hat{z}k; \mathbf{r} = \hat{z}z$ ดังนั้น สนามไฟฟ้าขณะหนึ่ง (Instantaneous Electric Field) จะเท่ากับ

$$\mathcal{E} = \text{Re}[\mathbf{E}e^{j\omega t}] = \text{Re}[\hat{x}E_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}] = \hat{x}E_0 \cos(\omega t - kz)$$

Uniform Plane Wave note

ในที่นี้ เราสามารถหา constant phase plane จาก $\omega t - kz = \text{constant}$ ดังนั้น ความเร็วในการเคลื่อนที่ของ constant phase plane จึงเท่ากับ

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

ซึ่งความเร็วนี้มีชื่อเรียกว่า ความเร็วเฟส (Phase Velocity)แน่นอนว่า ในอากาศ $u_p = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = c \approx 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$

คุณสมบัติของ Uniform Plane Wave $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-jk \cdot \mathbf{r}}$ จัดเป็น Transverse Electromagnetic Wave กล่าวคือ ในทิศทางการแพร่กระจาย จะไม่มีทั้ง $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ ดังแสดงในรูปที่ 2 ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

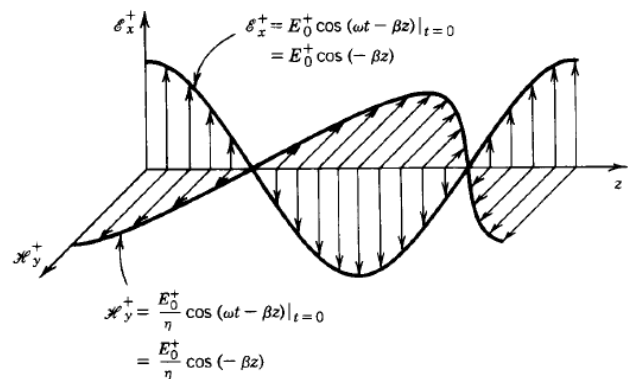
1. $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$

2. $\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}}{\eta}$ โดย $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ แสดง Intrinsic impedance

(หรือ wave impedance) ของตัวกลาง ใน Free Space จะมีค่าประมาณ $377 \text{ } (\Omega)$ อนึ่ง นิยามของ Intrinsic impedance คือ

$$\eta = \left| \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} \right|$$

3. $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ กล่าวคือ $\mathbf{E}$ ตั้งฉากกับ $\mathbf{H}$



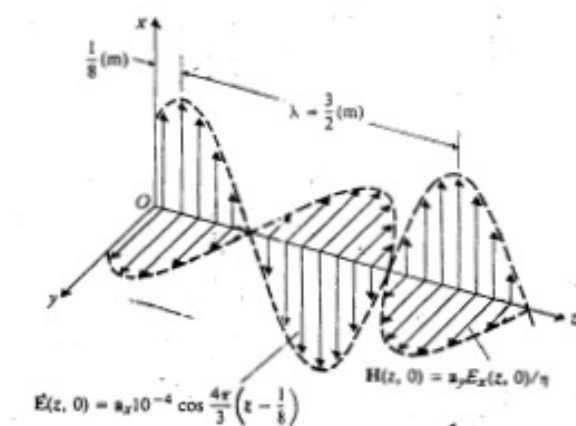
รูปที่ 2 Instantaneous field ของ Uniform Plane Wave

แบบฝึกหัด พิสูจน์คุณสมบัติข้างต้น

ตัวอย่าง 7-1 กำหนดให้ $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{x}} E_x e^{-jkz}$ แพร่กระจายในตัวกลาง ($\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \sigma = 0$) และ E_x เป็นคลื่น Sinusoidal ความถี่ 100 (MHz) มีค่าสูงสุดเท่ากับ 10^{-4} (V/m) ที่ $t = 0$ และ $z = 1/8 \text{ (m)}$

a) จงหา Instantaneous $\mathbf{E}$, Instantaneous $\mathbf{H}$

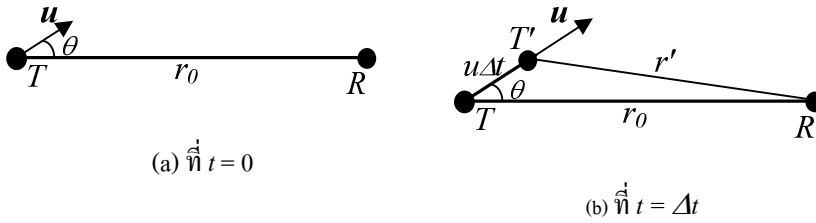
b) จงหาดำแหน่งที่ E_x มีค่าสูงสุดที่เวลา $t = 10^{-8} \text{ (s)}$



รูปที่ 3 ตัวอย่าง 7-1

7-2.1 DOPPLER EFFECT

Doppler effect เป็นปรากฏการณ์ที่คลื่นที่ได้รับต่างจากคลื่นที่ส่งเมื่อมีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (relative motion) ของผู้ส่งและผู้รับ
พิจารณาสถานการณ์ดังรูปที่ 4



สมมุติว่า Source ส่งคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ f และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u คลื่นที่ถูกส่งที่เวลา $t = 0$ จะไปถึง R ที่เวลา

$$t_1 = \frac{r_0}{c}$$

ในขณะที่คลื่นที่ถูกส่งด้วย T' ที่เวลา $t = \Delta t$ จะไปถึง R ที่เวลา

$$t_2 = \Delta t + \frac{r'}{c} = \Delta t + \frac{1}{c} [r_0^2 - 2r_0(u\Delta t)\cos\theta + (u\Delta t)^2]^{1/2} \xrightarrow{(u\Delta t)^2 \ll r_0^2} t_2 = \Delta t + \frac{r_0}{c} \left(1 - \frac{u\Delta t}{r_0} \cos\theta \right)$$

ดังนั้น เวลาที่ผ่านไปที่ R ระหว่างการรับคลื่นที่ $t = 0$ ถึงการรับคลื่นที่ $t = \Delta t$ เท่ากับ

$$\Delta t' = t_2 - t_1 = \Delta t \left(1 - \frac{u}{c} \cos\theta \right)$$

ซึ่งไม่เท่ากับ Δt ดังนั้น ถ้า Δt แสดงคาบของคลื่นที่ Source ($\Delta t = 1/f$) ความถี่ของคลื่นที่ได้รับเท่ากับ

$$f' = \frac{1}{\Delta t'} = \frac{f}{1 - \frac{u}{c} \cos\theta} \cong f \left(1 + \frac{u}{c} \cos\theta \right); \left(\frac{u}{c} \right)^2 \ll 1$$

ดังนั้น ความถี่จะสูงขึ้นเมื่อมีการเคลื่อนที่เข้าหากัน และต่ำลงเมื่อเคลื่อนที่ออกจากกัน ปรากฏการณ์ Red Shift ที่แสงจากดาว
ห่างไกลมีความถี่ต่ำลง (ขยับไปทางสีแดง) ก็เป็นเพราะ Doppler effect นี้

7-2.3 POLARIZATION OF PLANE WAVES

ในที่นี้ Polarization เป็นสิ่งที่ใช้อธิบาย time-varying behavior of E at a given point in space ซึ่งสามารถอธิบายได้ในเทอมของ
ส่วนประกอบของสนามไฟฟ้า 2 ส่วนที่ตั้งฉากกันกับความสัมพันธ์ทางเฟสของส่วนประกอบทั้งสอง ดังตัวอย่างในรูปที่ 5 เมื่อ
พิจารณาสนามไฟฟ้าขณะหนึ่ง (Instantaneous Electric Field) ซึ่งเป็น Plane wave ที่แพร่กระจายในทิศทาง $-z$ สามารถแสดงได้
โดย

$$\mathcal{E}(z;t) = \hat{x}\mathcal{E}_x(z;t) + \hat{y}\mathcal{E}_y(z;t) \text{ โดยที่}$$

Uniform Plane Wave note

$$\mathcal{E}_x(z;t) = \text{Re}[E_x e^{j(\omega t + kz)}] = \text{Re}[E_{x0} e^{j\phi_x} e^{j(\omega t + kz)}] = E_{x0} \cos(\omega t + kz + \phi_x); E_x = E_{x0} e^{j\phi_x}$$

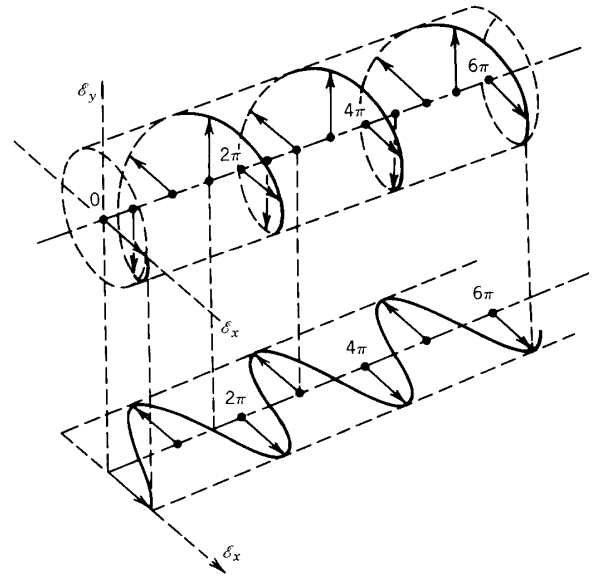
$$\mathcal{E}_y(z;t) = \text{Re}[E_y e^{j(\omega t + kz)}] = \text{Re}[E_{y0} e^{j\phi_y} e^{j(\omega t + kz)}] = E_{y0} \cos(\omega t + kz + \phi_y); E_y = E_{y0} e^{j\phi_y}$$

เราสามารถแบ่ง Polarization ได้เป็น 3 แบบได้คือ

A Linear Polarization : trace ของสนามไฟฟ้าที่จุดหนึ่งจะมีลักษณะเป็นเส้นตรง

เงื่อนไข $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = n\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ OR
ONLY one component ($\mathcal{E}_x$ or $\mathcal{E}_y$)

ตัวอย่าง



รูปที่ 5 การหมุนของ Plane wave สนามไฟฟ้า

B Circular Polarization : trace ของสนามไฟฟ้าที่จุดหนึ่งจะมีลักษณะเป็นวงกลม ในที่นี้ เนื่องจากเป็นวงกลม จึงต้องพิจารณาถึงทิศทางการหมุนด้วย ซึ่งเรียกว่า Sense of rotation อันได้จากการสังเกตในทิศทางการแพร่กระจาย แบ่งเป็นทิศตามเข็มนาฬิกา (Clockwise, CW) กับทิศทวนเข็มนาฬิกา (Counterclockwise, CCW)

เงื่อนไข $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \begin{cases} (1/2 + 2n)\pi, n = 0, 1, 2, \dots & \text{CW} \\ -(1/2 + 2n)\pi, n = 0, 1, 2, \dots & \text{CCW} \end{cases}$ AND $E_{x0} = E_{y0} (|\mathcal{E}_x| = |\mathcal{E}_y|)$

ตัวอย่าง

C Elliptic Polarization : trace ของสนามไฟฟ้าที่จุดหนึ่งจะมีลักษณะเป็นวงรี ในที่นี้ เนื่องจากเป็นวงรี จึงต้องพิจารณาถึงทิศทางการหมุนด้วย เช่นเดียวกับแบบวงกลม

เงื่อนไข 1. $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x = \begin{cases} (1/2 + 2n)\pi, n = 0, 1, 2, \dots & \text{CW} \\ -(1/2 + 2n)\pi, n = 0, 1, 2, \dots & \text{CCW} \end{cases}$ AND $E_{x0} \neq E_{y0} (|\mathcal{E}_x| \neq |\mathcal{E}_y|)$ OR

2. $\Delta\phi = \phi_y - \phi_x \neq \frac{n}{2}\pi \begin{cases} > 0 & \text{CW} \\ < 0 & \text{CCW} \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

ตัวอย่าง

7-3 PLANE WAVE IN LOSSY MEDIA

โดยทั่วไป ค่า Permittivity ของตัวกลางทั่วไปสามารถแสดงได้เป็น

$$\epsilon_c = \epsilon' - j\epsilon'' \text{ (F/m)}$$

โดยส่วน ϵ'' แทนส่วนความสูญเสีย (Loss) ในตัวกลางนั้น ซึ่งโดยทั่วไป จะเปลี่ยนตามความถี่ กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันของ ω

ในดัดนำไฟฟ้า เนื่องจาก $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon' \mathbf{E} = (\sigma + j\omega\epsilon') \mathbf{E} = j\omega\epsilon_c \mathbf{E}; \epsilon_c = \epsilon' + \frac{\sigma}{j\omega}; \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega}$$

อัตราส่วนระหว่าง ϵ'' กับ ϵ' จะมีชื่อเรียกว่า Loss Tangent ซึ่งเป็นค่าที่ใช้วัดความสูญเสีย

$$\tan \delta_c = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}; \delta_c : \text{Loss Angle}$$

เนื่องจากค่า Permittivity เป็นจำนวนเชิงซ้อน ค่า wavenumber ก็เป็นจำนวนเชิงซ้อนเช่นกัน กล่าวคือ

$$k_c = \omega \sqrt{\mu \epsilon_c}$$

ดังนั้น สมการคลื่นจะเปลี่ยนเป็น $\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \epsilon_c \mathbf{E} = \nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ เมื่อกำหนดนิยามของค่าคงที่การแพร่กระจาย (Propagation Constant) ดังนี้

$$\gamma = jk_c = j\omega \sqrt{\mu \epsilon_c} = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega \epsilon'} \right)^{1/2} = j\omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^{1/2}; \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$$

สมการคลื่นจะเขียนใหม่ได้เป็น $\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ เมื่อพิจารณา uniform plane wave แพร่กระจายในทิศทาง +z และมีเพียงส่วนประกอบแกน x จะได้

$$\frac{d^2 E_x}{dx^2} - \gamma^2 E_x = 0 \rightarrow E_x = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z - j\beta z}$$

ในที่นี้ α, β มีชื่อเรียกว่า ค่าคงที่การลดทอน (Attenuation Constant, unit: (Np/m)) และค่าคงที่เฟส (Phase Constant, unit: (rad/m)) ตามลำดับ โดยที่ 1 (Np (neper)/m) หมายถึง การลดทอนเป็น 0.368 หลังเคลื่อนที่ 1 (m) หรือเท่ากับ $-20 \log_{10} e = -8.69$ (dB/m) ให้สังเกตว่า $k = \beta$ ในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย (lossless media)

7-3.1 LOW LOSS DIELECTRICS

ในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย $\sigma = 0$ OR $\epsilon'' = 0$ ในตัวกลางที่มีการสูญเสียต่ำ $\epsilon'' \ll \epsilon'$ OR $\frac{\sigma}{\omega \epsilon'} \ll 1$ ดังนั้น

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^{1/2} \cong j\omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left(1 - j \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right)$$

เพราะฉะนั้น

Uniform Plane Wave note

$$\alpha = \text{Re}[\gamma] = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} = \frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (\text{Np/m})$$

$$\beta = \text{Im}[\gamma] = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right) \quad (\text{rad/m})$$

ค่าอิมพีแดนซ์ในเนื้อสาร (Intrinsic Impedance) และความเร็วเฟสจะเท่ากับ

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^{-1/2} \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j \frac{\epsilon''}{2\epsilon'} \right) \quad (\Omega); \quad u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'} \right)^2 \right] \quad (\text{m/s})$$

7-3.2 GOOD CONDUCTORS

ในตัวนำไฟฟ้าที่ดี $\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \gg 1$; $\epsilon_c = \epsilon' + \frac{\sigma}{j\omega} \cong \frac{\sigma}{j\omega}$ ดังนั้น

$$\gamma = \alpha + j\beta \cong j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \sqrt{\frac{\sigma}{j\omega\epsilon'}} = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_c}} \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = (1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}} \quad (\Omega); \quad u_p = \frac{\omega}{\beta} \cong \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (\text{m/s})$$

ยกตัวอย่าง ทองแดงที่มีค่า $\sigma = 5.80 \times 10^7$ (S/m) และ $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ (H/m) ที่ความถี่ 3 MHz $u_p = 720$ (m/s) และความยาวคลื่นในตัวนำไฟฟ้าเท่ากับ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{u_p}{f} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}} \quad (\text{m})$$

ดังนั้น ที่ 3 MHz $\lambda = 0.24$ (m) ในขณะที่ความยาวคลื่นในอากาศ $\lambda_0 = c/f = 100$ (m) ค่าคงที่การลดทอน α ที่ 3 MHz เท่ากับ

$$\alpha = \sqrt{\pi f\mu\sigma} = \sqrt{\pi(3 \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(5.80 \times 10^7)} = 2.62 \times 10^4 \quad (\text{Np/m})$$

ซึ่งเป็นค่าที่สูงมาก อันหมายถึง คลื่นไม่สามารถแพร่กระจายเข้าไปในตัวนำไฟฟ้าได้ ให้สังเกตว่า ค่า α จะแปรผันตรงกับค่ารากกำลังสองของ f ส่วนกลับของ α จะเรียกว่า **Skin Depth** กล่าวคือ

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}} = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi} \quad (\text{m})$$

ตัวอย่าง 7-4 Uniform plane wave แพร่กระจายในน้ำทะเล ($\epsilon_r = 72, \mu_r = 1, \sigma = 4$) โดยกำหนดให้

$$\mathcal{E}(z=0;t) = \hat{x}100\cos(10^7\pi t) \quad (\text{V/m})$$

7-4 GROUP VELOCITY

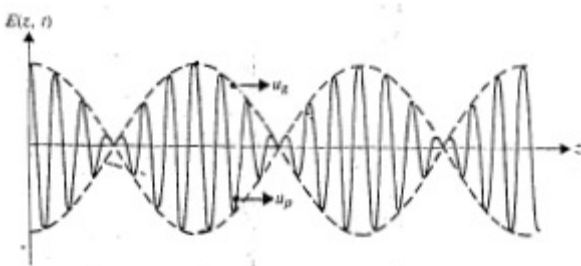
ความเร็วเฟสเท่ากับ $u_p = \omega / \beta$ (m/s) ในขณะที่ Plane wave ในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย $\beta = k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ ดังนั้น $u_p = (\mu\epsilon)^{-1/2}$ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของความถี่ แต่ในความเป็นจริง เมื่อคลื่นแพร่กระจายผ่านตัวกลาง ความเร็วเฟสอาจเปลี่ยนตามความถี่ ส่งผลให้สัญญาณที่ความถี่หนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่แตกต่างจากสัญญาณที่อีกความถี่หนึ่ง ปรากฏการณ์ที่เกิดการเปลี่ยนของสัญญาณเนื่องจากความเร็วเฟสขึ้นกับความถี่นั้น เรียกว่า การกระจาย (dispersion) และตัวกลางที่ทำให้เกิดการกระจาย เรียกว่า *dispersive medium*

โดยปกติ สัญญาณประกอบด้วยหลายความถี่ ยกตัวอย่างเช่น สัญญาณ AM ที่เกิดจากการมอดูเลตสัญญาณเสียงกับคลื่นพาห์ (Carrier) สัญญาณดังกล่าวนี้ จะประกอบด้วยกลุ่มความถี่เป็น wave packet ในที่นี้ ความเร็วกลุ่ม (Group Velocity) เป็นสิ่งที่ใช้แสดงความเร็วของ wave packet (กลุ่มความถี่) ซึ่งหมายถึง ความเร็วในการส่งข่าวสาร หรือกำลัง

พิจารณาตัวอย่าง wave packet ที่ประกอบด้วยคลื่น 2 ความถี่ที่มีขนาดเท่ากัน และความถี่ต่างกันเพียงเล็กน้อย กำหนดให้ความถี่ของคลื่นทั้งสองเท่ากับ $\omega_0 + \Delta\omega, \omega_0 - \Delta\omega; \Delta\omega \ll \omega_0$ และค่าคงที่เฟสที่ความถี่ทั้งสองเท่ากับ $\beta_0 + \Delta\beta, \beta_0 - \Delta\beta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} E(z,t) &= E_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (\beta_0 + \Delta\beta)z] + E_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (\beta_0 - \Delta\beta)z] \\ &= 2E_0 \cos(t\Delta\omega - z\Delta\beta) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Delta\omega \ll \omega_0$ คลื่นข้างต้นมีลักษณะเป็นคลื่นที่แกว่งเร็วมาก และขนาดเปลี่ยนแปลงช้า ดังแสดงในรูปที่ 6



รูปที่ 6 ผลรวมของคลื่น 2 ความถี่ที่มีขนาดเท่ากันแต่ความถี่ต่างกันเล็กน้อยที่เวลา t

ความเร็วเฟสจะได้จากการกำหนดให้ $\omega_0 t - \beta_0 z = \text{constant}$ ซึ่งเท่ากับ

$$u_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega_0}{\beta_0}$$

ความเร็วของขอบคลื่น (Group Velocity) สามารถหาได้จากการกำหนดให้ $t\Delta\omega - z\Delta\beta = \text{constant}$ ซึ่งเท่ากับ

$$u_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{1}{\Delta\beta / \Delta\omega}$$

เมื่อหา limit ที่ $\Delta\omega \rightarrow 0$ จะได้

$$u_g = \frac{1}{d\beta / d\omega} \quad (\text{m/s})$$

Uniform Plane Wave note

ในกรณีที่ $u_g = u_p$ จะไม่เกิด dispersion ซึ่งหมายถึง ไม่เกิดการผิดเพี้ยนของสัญญาณ

7-5 FLOW OF ELECTROMAGNETIC POWER AND POYNTING VECTOR

พิจารณา $\mathbf{E}(z) = \hat{x}E_x(z) = \hat{x}E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z}$ ดังนั้น $\mathcal{E}(z;t) = \text{Re}[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] = \hat{x}E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$

ในทำนองเดียวกัน $\mathbf{H}(z) = \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}}{\eta_c} = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{j\beta z} e^{-j\theta_\eta}; \eta_c = |\eta_c| e^{j\theta_\eta}$ ดังนั้น จะได้

$$\mathcal{H}(z;t) = \text{Re}[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] = \hat{y} \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Poynting vector จะเท่ากับ

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{E} \times \mathcal{H} = \text{Re}[\mathbf{E}(z)e^{j\omega t}] \times \text{Re}[\mathbf{H}(z)e^{j\omega t}] = \hat{z} \frac{E_0^2}{|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \\ &= \hat{z} \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} [\cos \theta_\eta + \cos(2\omega t - 2\beta z - \theta_\eta)] \end{aligned}$$

Time-average Poynting vector จะเท่ากับ

$$\mathbf{P}_{av}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(z;t) dt = \hat{z} \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \quad (\text{W/m}^2); T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

ในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย เนื่องจาก $\sigma = 0, \eta_c \rightarrow \eta, \theta_\eta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0, \mathbf{P}_{av}(z) = \hat{z} \frac{E_0^2}{2\eta} \quad (\text{W/m}^2)$

โดยทั่วไป Time-average Poynting vector หาได้จาก

$$\mathbf{P}_{av}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}(z;t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\text{Re}[\mathbf{E}e^{j\omega t}] \times \text{Re}[\mathbf{H}e^{j\omega t}]) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] dt = \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$

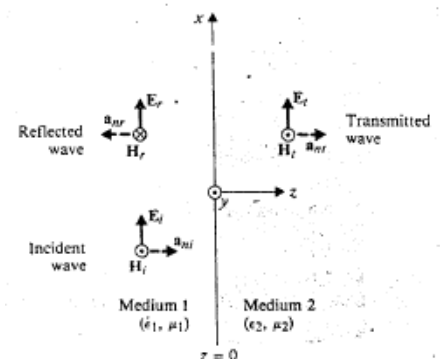
7-6 NORMAL INCIDENCE OF PLANE WAVES AT PLANE BOUNDARIES

พิจารณาคลื่นเคลื่อนที่จากตัวกลาง 1 ไปยังตัวกลาง 2 โดยให้ทิศทางการเคลื่อนที่ตั้งฉากกับระนาบขอบเขต ดังแสดงในรูปที่ 7 สมมติให้ตัวกลางทั้งสองไม่มีการสูญเสีย และคลื่นตกกระทบ (Incident wave) เท่ากับ

$$\mathbf{E}_i(z) = \hat{x}E_{i0}e^{-j\beta_1 z}; \mathbf{H}_i(z) = \frac{\hat{k}_i \times \mathbf{E}_i}{\eta_1} = \frac{\hat{z} \times \mathbf{E}_i}{\eta_1} = \hat{y} \frac{E_{i0}e^{-j\beta_1 z}}{\eta_1}; \eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

เนื่องจากมีความไม่ต่อเนื่องที่ระนาบ $z=0$ จึงมีคลื่นสะท้อนกลับเข้าตัวกลาง 1 และคลื่นส่งผ่านไปยังตัวกลาง 2 ซึ่งสามารถแสดงได้โดย

$$\mathbf{E}_r(z) = \hat{x}E_{r0}e^{-j\beta_1 z}; \mathbf{H}_r(z) = \frac{\hat{k}_r \times \mathbf{E}_r}{\eta_1} = \frac{-\hat{z} \times \mathbf{E}_r}{\eta_1} = \hat{y} \frac{E_{r0}e^{-j\beta_1 z}}{\eta_1}$$



รูปที่ 7 Normal Incidence

Uniform Plane Wave note

$$\mathbf{E}_t(z) = \hat{\mathbf{x}}E_{t0}e^{-j\beta_2 z}; \mathbf{H}_t(z) = \frac{\hat{\mathbf{k}}_t \times \mathbf{E}_t}{\eta_2} = \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}_t}{\eta_2} = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_{t0}e^{-j\beta_2 z}}{\eta_2}; \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2$, จะได้

$$E_{i0} + E_{r0} = E_{t0} \quad (3)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2$, จะได้

$$\frac{1}{\eta_1}(E_{i0} - E_{r0}) = \frac{1}{\eta_2}E_{t0} \quad (4)$$

เมื่อแก้สมการ (3),(4) จะได้

$$E_{r0} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}; E_{t0} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} E_{i0}$$

ค่าสัมประสิทธิ์สะท้อน (Reflection Coefficient) และค่าสัมประสิทธิ์ส่งผ่าน (Transmission Coefficient) เท่ากับ

$$\Gamma = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}; \tau = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

ให้สังเกตว่า $1 + \Gamma = \tau$ อัตราส่วนคลื่นนิ่ง (Standing wave ratio, SWR) เท่ากับ

$$S = \frac{|\mathbf{E}|_{\max}}{|\mathbf{E}|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} (\text{dimensionless}); 1 \leq S \leq \infty, |\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1} \leq 1$$

สนามไฟฟ้ารวมในตัวกลาง 1 เท่ากับ

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{x}}(E_{i0}e^{-j\beta_1 z} + \Gamma E_{i0}e^{j\beta_1 z}) = \hat{\mathbf{x}}E_{i0}e^{-j\beta_1 z}(1 + \Gamma e^{j2\beta_1 z}); \mathbf{H}_1(z) = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z})$$

$$\mathbf{E}_2(z) = \mathbf{E}_t(z) = \hat{\mathbf{x}}\tau E_{i0}e^{-j\beta_2 z}; \mathbf{H}_2(z) = \mathbf{H}_t(z) = \hat{\mathbf{y}} \frac{\tau E_{i0}}{\eta_2}e^{-j\beta_2 z}$$

ตัวอย่าง 7-7 Uniform plane wave เคลื่อนที่ในตัวกลาง 1 ไปยังตัวกลาง 2 ที่มี Intrinsic Impedance เท่ากับ η_1, η_2 ตามลำดับ และไม่มี การสูญเสีย จงหา Time-average power densities ในตัวกลางทั้งสอง และหา SWR เมื่อ $2\eta_1 = \eta_2$

7-6.1 NORMAL INCIDENCE ON A GOOD CONDUCTOR

ในตัวนำไฟฟ้าที่ดี $\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \gg 1$ ในตัวนำไฟฟ้าที่สมบูรณ์แบบ (Perfect Electric Conductor, PEC) $\sigma \rightarrow \infty$ ดังนั้น ถ้าตัวกลาง 2

เป็น PEC $\eta_2 \cong \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} 0$ เพราะฉะนั้น $\Gamma = -1; \tau = 0$ ให้สังเกตว่า จากเงื่อนไขขอบเขต $\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ บน PEC

จะได้ $E_{i0} + E_{r0} = 0$ ซึ่งหมายถึง $\Gamma = -1$

ในที่นี้ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในตัวกลาง 1 จะเท่ากับ

$$\mathbf{E}_1(z) = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \hat{x}(E_{i0}e^{-j\beta_1 z} + \Gamma E_{i0}e^{j\beta_1 z}) = \hat{x}E_{i0}(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) = -\hat{x}j2E_{i0} \sin \beta_1 z;$$

$$\mathbf{H}_1(z) = \hat{y} \frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) = \hat{y} \frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) = \hat{y} \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z$$

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า สนามไฟฟ้า $\mathbf{E}_1$ ตามหลัง (lag) สนามแม่เหล็ก $\mathbf{H}_1$ อยู่ $\pi/2$ (-j factor) เมื่อหาสนามขณะหนึ่ง จะได้

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(z; t) &= \text{Re}[\mathbf{E}_1(z)e^{j\omega t}] = \hat{x} \text{Re}[j2E_{i0} \sin \beta_1 z e^{j\omega t}] = \hat{x}2E_{i0} \sin \beta_1 z \text{Re}[e^{-j\pi/2} e^{j\omega t}] \\ &= \hat{x}2E_{i0} \sin \beta_1 z \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \hat{x}2E_{i0} \sin \beta_1 z \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_1(z; t) = \text{Re}[\mathbf{H}_1(z)e^{j\omega t}] = \hat{y} \text{Re}[\frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z e^{j\omega t}] = \hat{y} \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos \beta_1 z \cos \omega t$$

7-7 OBLIQUE INCIDENCE OF PLANE WAVES AT PLANE BOUNDARIES

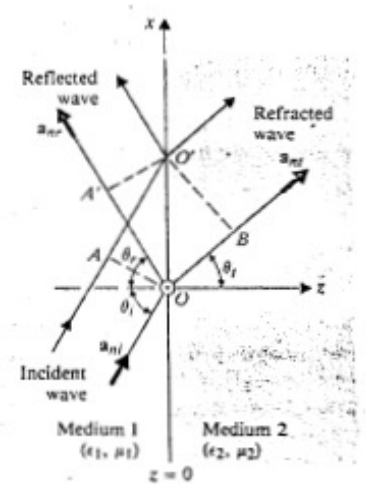
ในที่นี้ จะทำการศึกษาเกี่ยวกับกรณีที่คลื่นตกกระทบบนขอบเขตเป็นมุมเอียง ดังแสดงในรูปที่ 8 ในรูปนี้ ระนาบ $z = 0$ เป็นระนาบขอบเขต ระนาบที่รวมเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวขอบเขต (ระนาบขอบเขต) กับเวกเตอร์ wavenumber จะมีชื่อเรียกว่า Plane of Incidence (ระนาบตกกระทบ) ในรูป Plane of incidence เป็นระนาบ xz มุมในรูปจะมีชื่อเรียกต่างกันว่า θ_i : Angle of incidence (มุมตกกระทบ), θ_r : Angle of reflection (มุมสะท้อน) และ θ_t : Angle of transmission (มุมส่งผ่าน)

ในรูปที่ 8 เส้น AO, O'A', และ O'B แสดง wavefront (constant phase plane) ของคลื่นตกกระทบ (incident) คลื่นสะท้อน (reflected) และคลื่นส่งผ่าน (transmitted) ตามลำดับ เนื่องจากคลื่นตกกระทบและคลื่นส่งผ่านอยู่ในตัวกลาง 1 อันเดียวกัน ความเร็วเฟสต้องเท่ากับ u_{p1} ดังนั้นระยะทาง $\overline{OA'}$ กับ $\overline{AO'}$ ต้องเท่ากัน ส่งผลให้

$$\overline{OA'} = \overline{OO'} \sin \theta_r = \overline{AO'} = \overline{OO'} \sin \theta_i \text{ หรือ}$$

$$\boxed{\theta_r = \theta_i} : \text{Snell's law of reflection}$$

ในตัวกลาง 2 เนื่องจากเวลาที่คลื่นส่งผ่านใช้ในการเคลื่อนที่จากจุด O ไปยัง B ต้องเท่ากับเวลาที่คลื่นตกกระทบใช้ในการเคลื่อนที่จากจุด A ไปยัง O' ดังนั้น จะได้เงื่อนไข



รูปที่ 8 Oblique Incidence

$$\frac{\overline{OB}}{u_{p2}} = \frac{\overline{AO'}}{u_{p1}} \rightarrow \frac{OB}{AO} = \frac{\overline{OO'} \sin \theta_t}{\overline{OO'} \sin \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} \text{ จากเงื่อนไขนี้ จะได้}$$

$$\boxed{\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{u_{p2}}{u_{p1}} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{n_1}{n_2}} : \text{Snell's law of refraction}$$

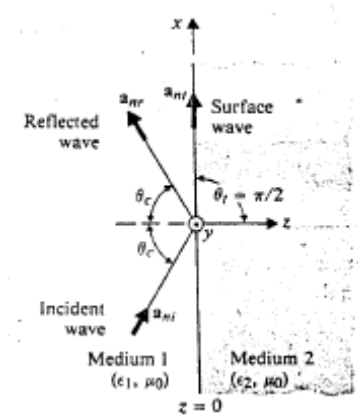
n ในสมการข้างต้น เรียกว่า *index of refraction* ซึ่งเท่ากับอัตราส่วนของความเร็วแสงในอากาศ (free space) กับความเร็วแสงในตัวกลาง กล่าวคือ $n = c/u_p$ ในกรณีที่ $\mu_1 = \mu_2$ จะได้

$$\boxed{\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta_2}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}}} \quad (\mu_1 = \mu_2)}$$

7-7.1 TOTAL REFLECTION

ในกรณีที่ $\epsilon_1 > \epsilon_2$ (ตัวกลาง 1 หนาแน่นกว่า, more dense) จาก Snell's law of refraction จะเห็นว่า $\theta_t > \theta_i$ จึงเป็นไปได้ที่ $\theta_t = \pi/2$ ซึ่งเป็นมุมที่คลื่นส่งผ่านเคลื่อนที่ไปตามระนาบขอบเขต เมื่อเพิ่มขนาดมุมตกกระทบ ก็จะไม่มีการส่งผ่านไปยังตัวกลาง 2 ซึ่งทำให้เกิดการสะท้อนกลับทั้งหมด (Total Reflection) มุมตกกระทบที่ทำให้เกิด Total reflection มีชื่อเรียกว่า *Critical angle* ซึ่งหาได้จากการกำหนดให้ $\theta_t = \pi/2$ ดังนั้น

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_c} = \frac{1}{\sin \theta_c} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \text{ หรือ } \boxed{\theta_c = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right)} \quad (\mu_1 = \mu_2)$$



รูปที่ 9 แสดงสถานการณ์ดังกล่าวนี้ ในกรณีที่ $\theta_i > \theta_c$, $\sin \theta_t = \sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_2} \sin \theta_i > 1$, รูปที่ 9 Plane wave incident at critical angle, $\epsilon_1 > \epsilon_2$
ทำให้ $\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm j \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}$ ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน

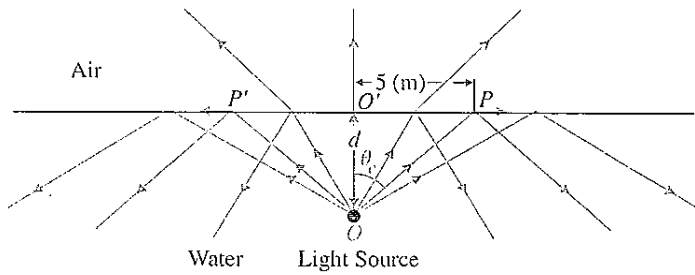
wavevector ในตัวกลาง 2 จะเท่ากับ $\mathbf{k}_t = \beta_2 (\hat{x} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t)$ ดังนั้น $e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$ เท่ากับ

$$e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} = e^{-j\beta_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} = e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_{2x} x}; \alpha_2 = \beta_2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sin^2 \theta_i - 1}; \beta_{2x} = \beta_2 \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i$$

ซึ่งหมายถึง คลื่นจะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อเคลื่อนที่ออกจากระนาบขอบเขต จึงเป็นคลื่นที่เคลื่อนที่บริเวณผิวหน้าของขอบเขต ทำให้มีชื่อเรียกว่า *surface wave*

ตัวอย่าง 7-9 สมมติว่า แหล่งกำเนิดแสงแบบ isotropic ได้น้ำ ($\epsilon_r = 1.75$) ที่ระยะ d จากผิวน้ำ ส่องสว่างเป็นรูปวงกลมรัศมี (ระยะ O'P ในรูปที่ 10) 5 (m) จงหาระยะ d

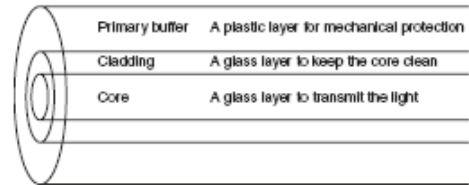
Uniform Plane Wave note



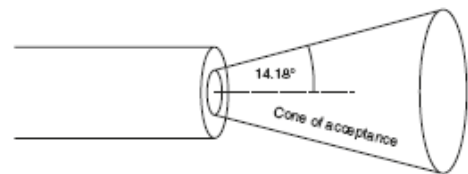
รูปที่ 10 ตัวอย่าง 7-9

ตัวอย่าง Optical Fiber จะใช้หลักการของ Total reflection เพื่อควบคุมแสงให้อยู่ในแกนกลาง (core ในรูปที่ 11) Numerical Aperture (NA) ของ Optical Fiber เป็นตัวเลขที่ใช้แสดงขนาดกรวยที่สามารถนำแสงเข้าได้ (รูปที่ 12)

กำหนดให้ index of refraction ของ core กับ cladding เท่ากับ n_1, n_2 ตามลำดับ



รูปที่ 11 โครงสร้างของ Optical Fiber



รูปที่ 12 Acceptance angle = $\sin^{-1} \text{NA}$

7-7.3 PERPENDICULAR POLARIZATION

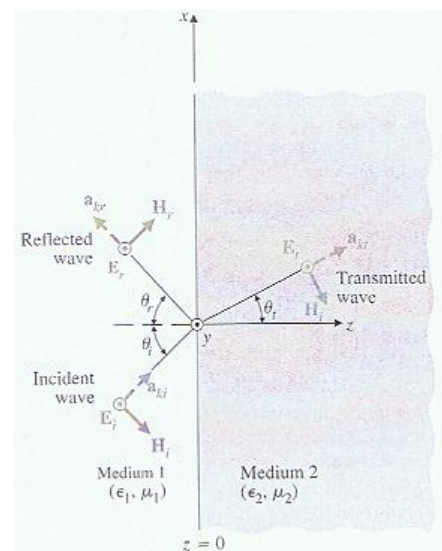
ในที่นี้ ระนาบ xz เป็น Plane of Incidence ทิศทางการแพร่กระจายของคลื่นตกกระทบเท่ากับ $\hat{k}_i = \hat{x} \sin \theta_i + \hat{z} \cos \theta_i$ สามารถแสดงสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้ดังนี้

$$\mathbf{E}_i(x, z) = \hat{y} E_{i0} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)};$$

$$\mathbf{H}_i(x, z) = \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\hat{x} \cos \theta_i + \hat{z} \sin \theta_i) e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

ในกรณีที่เป็นตัวกลางไม่มีการสูญเสีย $\beta_1 = k_1$ สำหรับคลื่นสะท้อนกับคลื่นส่งผ่านจะเป็นดังนี้

$$\hat{k}_r = \hat{x} \sin \theta_r - \hat{z} \cos \theta_r; \mathbf{E}_r(x, z) = \hat{y} E_{r0} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)};$$



รูปที่ 13 Perpendicular polarization

Uniform Plane Wave note

$$\mathbf{H}_r(x, z) = \frac{E_{r0}}{\eta_1} (\hat{x} \cos \theta_r + \hat{z} \sin \theta_r) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

$$\hat{k}_t = \hat{x} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t; \mathbf{E}_t(x, z) = \hat{y} E_{t0} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}; \mathbf{H}_t(x, z) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} (-\hat{x} \cos \theta_t + \hat{z} \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = \hat{n} \times \mathbf{E}_2$ และ $\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$ จะได้

$$E_{i0} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + E_{r0} e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} = E_{t0} e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t}; \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} - E_{r0} \cos \theta_r e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \cos \theta_t e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t} \forall x$$

เพื่อให้เงื่อนไขนี้เป็นจริงที่ทุกตำแหน่งบนระนาบขอบเขต $e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} = e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} = e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t}$ หรือ

$$\beta_1 x \sin \theta_i = \beta_1 x \sin \theta_r = \beta_2 x \sin \theta_t$$

ซึ่งเรียกว่า “phase-matching” condition ดังนั้น $\theta_i = \theta_r; \sin \theta_t / \sin \theta_i = \beta_1 / \beta_2 = n_1 / n_2$

หรือ Snell's law ทั้งสอง ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตจะเท่ากับ $E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}; \frac{\cos \theta_i}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2} \cos \theta_t$

เมื่อแก้สมการหาค่า E_{r0} กับค่า E_{t0} ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับค่าสัมประสิทธิ์การส่งผ่านจะได้เป็น

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}; \tau_{\perp} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

สังเกตว่า เมื่อ $\theta_i = 0 \rightarrow \theta_r = \theta_t = 0$ ค่าข้างต้นจะเท่ากับค่าที่ได้สำหรับ Normal Incidence ใน 7-6 อนึ่ง ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับค่าสัมประสิทธิ์การส่งผ่านจะเหมือนกับกรณี Normal Incidence กล่าวคือ $1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}$

ในกรณีที่ตัวกลาง 2 เป็น PEC $\eta_2 = 0$ ดังนั้น $\Gamma_{\perp} = -1 (E_{r0} = -E_{i0}); \tau_{\perp} = 0 (E_{t0} = 0)$

ตัวอย่าง 7-12 กำหนดให้สนามไฟฟ้าขณะหนึ่งที่เป็นคลื่นระนาบ $\mathcal{E}_i(x, z; t) = \hat{y} 10 \cos(\omega t + 3x - 4z)$ (V/m) ตกกระทบบนขอบเขต PEC ที่ $z = 0$

a) หา $\beta_1, \omega, \theta_1$

b) หา $\mathbf{E}_r(x, z)$

c) หา $\mathcal{E}_1(x, z; t)$

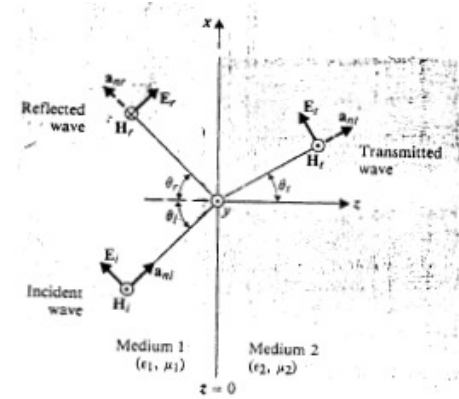
7-7.4 PARALLEL POLARIZATION

กำหนดให้ ระนาบ xz เป็น Plane of Incidence และทิศทางการแพร่กระจายของคลื่นตกกระทบบนเท่ากับ $\hat{k}_i = \hat{x} \sin \theta_i + \hat{z} \cos \theta_i$ เช่นเดียวกับกรณี Perpendicular polarization สามารถแสดงสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กได้ดังนี้

$$\mathbf{E}_i(x, z) = E_{i0} (\hat{x} \cos \theta_i - \hat{z} \sin \theta_i) e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)};$$

$$\mathbf{H}_i(x, z) = \hat{y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

สำหรับคลื่นสะท้อนกับคลื่นส่งผ่าน จะเป็นดังนี้



รูปที่ 14 Parallel polarization

$$\hat{k}_r = \hat{x} \sin \theta_r - \hat{z} \cos \theta_r; \mathbf{E}_r(x, z) = E_{r0} (\hat{x} \cos \theta_r + \hat{z} \sin \theta_r) e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}; \mathbf{H}_r(x, z) = -\hat{y} \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

$$\hat{k}_t = \hat{x} \sin \theta_t + \hat{z} \cos \theta_t; \mathbf{E}_t(x, z) = E_{t0} (\hat{x} \cos \theta_t - \hat{z} \sin \theta_t) e^{-j\beta_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}; \mathbf{H}_t(x, z) = \hat{y} \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต $\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = \hat{n} \times \mathbf{E}_2$, $\hat{n} \times \mathbf{H}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H}_2$ และ Snell's law ทั้งสอง (หรือ Phase-matching) จะได้

$$(E_{i0} + E_{r0}) \cos \theta_i = E_{t0} \cos \theta_t; \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) = \frac{E_{t0}}{\eta_2}$$

เมื่อแก้สมการหาค่า E_{r0} กับค่า E_{t0} ค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับค่าสัมประสิทธิ์การส่งผ่านจะได้เป็น

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}; \tau_{\parallel} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

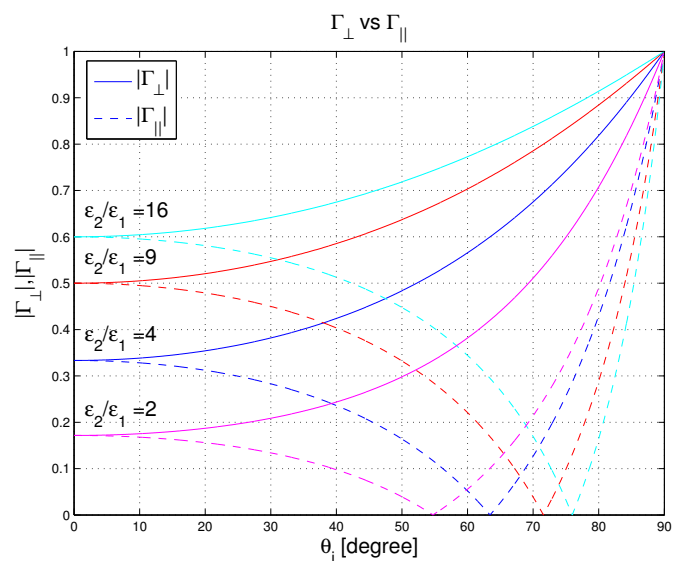
สังเกตว่า เมื่อ $\theta_i = 0 \rightarrow \theta_r = \theta_t = 0$ ค่าข้างต้นจะเท่ากับค่าที่ได้สำหรับ Normal Incidence ใน 7-6 เช่นกัน อนึ่งความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับค่า

$$\text{สัมประสิทธิ์การส่งผ่านจะเท่ากับ } 1 + \Gamma_{\parallel} = \tau_{\parallel} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

ซึ่งจะเหมือนกับกรณี Perpendicular polarization เฉพาะกรณี

$$\theta_i = 0 \text{ เท่านั้น ในกรณีที่ตัวกลาง 2 เป็น PEC } \eta_2 = 0 \text{ ดังนั้น } \Gamma_{\parallel} = -1 (E_{r0} = -E_{i0}); \tau_{\parallel} = 0 (E_{t0} = 0)$$

รูปที่ 15 แสดงการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนของ Polarization ทั้งสอง ซึ่งสังเกตได้ว่า Perpendicular จะมีค่าสูงกว่าขกเว้นเฉพาะกรณี Normal incidence



รูปที่ 15 Reflection coefficients ของ Polarization ทั้งสอง

7-7.5 BREWSTER ANGLE OF NO REFLECTION (TOTAL TRANSMISSION)

Brewster angle เป็นมุมตกกระทบที่ทำให้เกิด Total transmission ($\Gamma=0$) ในกรณี Perpendicular polarization

$$\Gamma_{\perp} = 0 = \frac{\eta_2 \cos \theta_{B,\perp} - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_{B,\perp} + \eta_1 \cos \theta_t} \rightarrow \eta_2 \cos \theta_{B,\perp} = \eta_1 \cos \theta_t$$

เนื่องจาก $\sin \theta_t / \sin \theta_{B,\perp} = \beta_1 / \beta_2$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{B,\perp} &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^2 \sin^2 \theta_t = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} (1 - \cos^2 \theta_t) = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \left(1 - \left(\frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \cos^2 \theta_{B,\perp} \right) = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \left(1 - \frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2} (1 - \sin^2 \theta_{B,\perp}) \right) \\ \therefore \sin^2 \theta_{B,\perp} &= \frac{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \left(1 - \frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2} \right)}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2} = \frac{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2} = \frac{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $\mu_1 = \mu_2$ จะไม่เกิด Total Transmission

ในกรณี Parallel polarization

$$\Gamma_{\parallel} = 0 = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_{B,\parallel}}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_{B,\parallel}} \rightarrow \eta_2 \cos \theta_t = \eta_1 \cos \theta_{B,\parallel}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{B,\parallel} &= \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^2 \sin^2 \theta_t = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} (1 - \cos^2 \theta_t) = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \left(1 - \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \right)^2 \cos^2 \theta_{B,\parallel} \right) = \frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \left(1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1} (1 - \sin^2 \theta_{B,\parallel}) \right) \\ \therefore \sin^2 \theta_{B,\parallel} &= \frac{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} \left(1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1} \right)}{1 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2} = \frac{\frac{\mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \epsilon_1} - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2}{1 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right)^2} = \frac{1 - \frac{\mu_2 \epsilon_1}{\mu_1 \epsilon_2}}{1 - \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta_{B,\parallel} = (1 - \epsilon_1 / \epsilon_2)^{-1/2} \quad (\mu_1 = \mu_2)$$

$$\therefore \tan \theta_{B,\parallel} = (\epsilon_1 / \epsilon_2)^{-1/2} = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} \quad \text{OR} \quad \theta_{B,\parallel} = \tan^{-1} \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_1} = \tan^{-1}(n_2 / n_1) \quad (\mu_1 = \mu_2)$$

ตัวอย่าง 7-13 คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าตกกระทบน้ำ ($\epsilon_r=80, \mu_r=1$) จากอากาศ จงหามุม Brewster ของกรณี Parallel polarization และ

ค่าคงที่การสะท้อนกับค่าคงที่การส่งผ่าน กรณี Perpendicular polarization และมุมตกกระทบเท่ากับมุม Brewster ดังกล่าว

$$\theta_{B,\parallel} = \sin^{-1} (1 - \epsilon_1 / \epsilon_2)^{-1/2} = \sin^{-1} (1 - 1 / \epsilon_r)^{-1/2} = 81.0^\circ$$

$$\sin \theta_t = \beta_1 \sin \theta_{B,\parallel} / \beta_2 = (1 / \sqrt{\epsilon_r}) (1 / \sqrt{1 + 1 / \epsilon_r}) = 1 / \sqrt{1 + \epsilon_r} = 1 / \sqrt{81} \rightarrow \theta_t = 6.38^\circ$$

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_{B,\parallel} - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_{B,\parallel} + \eta_1 \cos \theta_t} = \frac{40.1 \cos 81^\circ - 377 \cos 6.38^\circ}{40.1 \cos 81^\circ + 377 \cos 6.38^\circ} = -0.967; \tau_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.033$$