

2-5 GRADIENT OF A SCALAR FIELD

โดยทั่วไป สนามสเกลาร์สามารถแสดงโดย $V(t; u_1, u_2, u_3)$

นิยามของ Gradient คือ *The vector that represents both the magnitude and the direction of the maximum space rate of a scalar*

เมื่อพิจารณารูปที่ 2-18, จะได้

$$\text{grad } V = \nabla V \equiv \hat{a}_n \frac{dV}{dn}$$

สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dl} &= \frac{dV}{dn} \frac{dn}{dl} = \frac{dV}{dn} \cos \theta = \frac{dV}{dn} \hat{a}_n \cdot \hat{a}_l \\ &= \nabla V \cdot \hat{a}_l \end{aligned}$$

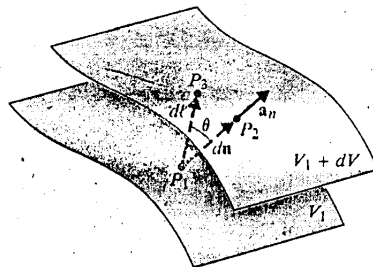


Fig. 2-18 Concerning gradient of a scalar.

และ $\frac{dV}{dl} \leq \frac{dV}{dn}$

เนื่องจากทิศทางของ Gradient เป็นทิศทางของอัตราการเปลี่ยนแปลงสูงสุด ดังนั้น

$$dV = \nabla V \cdot \hat{a}_l dl = \nabla V \cdot d\mathbf{l} \quad (1)$$

ในที่นี้ เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลง dV จากจุด P_1 ไปที่ P_2 (ตามทิศทางของ $d\mathbf{l}$) ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน กล่าวคือ (u_1, u_2, u_3) เป็น (x, y, z) และ (dl_1, dl_2, dl_3) เป็น (dx, dy, dz) จะได้

$$dV = \left(\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) = \left(\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{l} \quad (2)$$

เพราะฉะนั้น เมื่อเปรียบเทียบ (1) กับ (2) จะได้

$$\nabla V = \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) V$$

Operator ∇ มีชื่อเรียกว่า nabla (หรือเรียกกันว่า del operator) ซึ่งในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน สามารถแสดงได้โดย

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{และ } \nabla V \text{ อ่านว่า "del V"}$$

Example 2-9(a) The Electrostatic field intensity $\mathbf{E}$ is given by $\mathbf{E} = -\nabla V$. Determine $\mathbf{E}$ at the point $(1, 1, 0)$ if

$$V = V_0 e^{-x} \sin \frac{\pi y}{4}$$

2-6 DIVERGENCE OF A VECTOR FIELD

flux line เป็นสิ่งที่ใช้แสดงความแรงของสนามเวกเตอร์ (field strength) โดย field strength = number of flux lines/unit surface normal to the vector

นิยามของ Divergence คือ

Vector Calculus

$\text{div } \mathbf{A} \equiv$ the net outward flux of $\mathbf{A}$ per unit volume as the volume about the point tends to zero

ซึ่งสามารถแสดงได้โดยสมการต่อไปนี้

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta v}$$

ในรูป 2-19 ที่ใช้ระบบพิกัดคาร์ทีเซียนในการแสดง

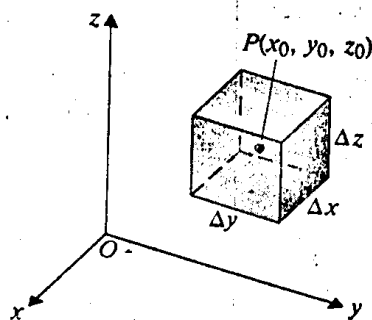


Fig. 2-19 A differential volume in Cartesian coordinates

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left[\int_{\text{front face}} + \int_{\text{back face}} + \int_{\text{right face}} + \int_{\text{left face}} + \int_{\text{top face}} + \int_{\text{bottom face}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

ที่ด้านหน้า: $\int_{\text{front face}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{A}_{\text{front face}} \cdot \Delta \mathbf{s}_{\text{front face}} = \mathbf{A}_{\text{front face}} \cdot \mathbf{x}(\Delta y \Delta z) = A_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta y \Delta z$

ถ้าใช้ Taylor series ในการขยาย $A_x(x_0 + \Delta x/2, y_0, z_0)$ จะได้

$$A_x(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) = A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{higher-order terms}$$

โดย higher-order terms (H.O.T) จะมีส่วนประกอบ $(\Delta x/2)^2$, $(\Delta x/2)^3$ และอื่นๆ

ถ้าใช้วิธีเดียวกัน ในส่วนของด้านหลัง จะได้

$$\begin{aligned} \int_{\text{back face}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} &= \mathbf{A}_{\text{back face}} \cdot \Delta \mathbf{s}_{\text{back face}} = \mathbf{A}_{\text{back face}} \cdot (-\mathbf{x} \Delta y \Delta z) = -A_x(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0) \Delta y \Delta z \\ &= -A_x(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial A_x}{\partial x} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \left[\int_{\text{front face}} + \int_{\text{back face}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \text{H.O.T.} \right) \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z$$

เมื่อใช้วิธีเดียวกันกับด้านอื่นๆ จะได้

$$\left[\int_{\text{right face}} + \int_{\text{left face}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \text{H.O.T.} \right) \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\left[\int_{\text{top face}} + \int_{\text{bottom face}} \right] \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} + \text{H.O.T.} \right) \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ดังนั้น

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \text{H.O.T.} \right) \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} \Delta x \Delta y \Delta z$$

เนื่องจาก $\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ และหา limit เมื่อ Δv เข้าใกล้ 0 จะได้

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

และ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ อ่านว่า “del dot A” ถ้า $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ จัดว่าเป็น Solenoidal field (divergenceless, divergence-free)

2-7 DIVERGENCE THEOREM

เนื่องจาก divergence ของสนามเวกเตอร์หมายถึง the net outward flux per unit volume ดังนั้น จะได้ Divergence Theorem ดังนี้

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

the volume integral of the divergence of a vector field equals the total outward flux of the vector through the surface that bounds the volume

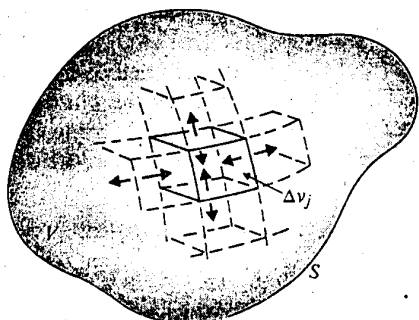


Fig. 2-20 Subdividing volume for proof of divergence theorem.

เมื่อพิจารณาส่วนปริมาตรย่อย Δv_j ในรูปข้างต้นที่ถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว s_j จากนิยามของ divergence จะได้

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j = \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

ถ้าแบ่งปริมาตรทั้งหมดเป็น N ส่วนที่เหมือนกัน แล้วรวมทุกส่วนเข้าด้วยกัน จะได้

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j \right] = \lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] \quad (3)$$

ด้านซ้ายของสมการข้างต้นจะเท่ากับ volume integral, กล่าวคือ

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot \mathbf{A})_j \Delta v_j \right] = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$$

ในขณะที่ด้านขวาของ (3) จะเท่ากับ

$$\lim_{\Delta v_j \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N \oint_{s_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \right] = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

เนื่องจาก flux จากส่วนปริมาตรย่อยภายในจะหักล้างกับ flux จากส่วนปริมาตรย่อยภายในที่อยู่ติดกัน คงเหลือเฉพาะแต่ flux จากส่วนปริมาตรย่อยภายใน ซึ่งก็คือ พื้นผิวที่ล้อมรอบปริมาตรทั้งหมด

Example 2-12 Given $\mathbf{A} = \hat{x}x^2 + \hat{y}xy + \hat{z}yz$, verify the divergence theorem over a cube one unit on each side.

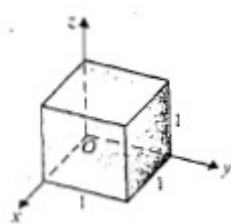


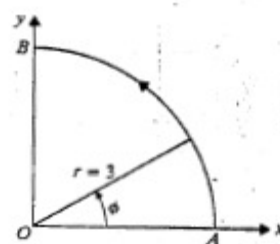
Fig. 2-21 A unit cube (Example 2-12).

2-8 CURL OF A VECTOR FIELD

แหล่งกำเนิดที่ทำให้เกิด outward flux อาจเรียกว่าเป็น 'flow' source ในขณะที่แหล่งกำเนิดที่ทำให้เกิดการไหลวน (circulation) รอบเส้นทางปิด จัดเป็น 'vortex' source

เริ่มต้น Circulation of $\mathbf{A}$ around contour $C \equiv \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

Example 2-14 Given a vector field $\mathbf{F} = \hat{x}xy - \hat{y}2x$, find its circulation around the path OABO in the figure.



ส่วนนิยามของ Curl ของสนามเวกเตอร์จะเป็นดังนี้

$$\text{curl } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} \equiv \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \left[\mathbf{a}_n \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}$$

หรือ a vector whose magnitude is the maximum net circulation of $\mathbf{A}$ per unit area as the area tends to zero and whose direction is the normal direction of the area when the area is oriented to make the net circulation maximum.

ในรูปขวามือ

$$(\nabla \times \mathbf{A})_u = \mathbf{a}_u \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_u} \left[\oint_{C_u} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]$$

ต่อไปนี้จะทำการคำนวณแต่ละส่วนประกอบของ $\nabla \times \mathbf{A}$ ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน โดยเริ่มต้นจะคำนวณ $(\nabla \times \mathbf{A})_x$ ดังแสดงในรูปข้างล่าง ในที่นี้ $u \rightarrow x$ $\Delta S_u = \Delta y \Delta z$ และ C แสดงเส้นทาง 1,2,3,4 ที่แสดงในรูป

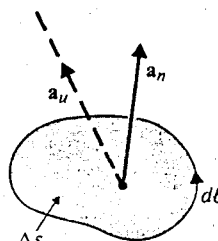


Fig. 2-23 Relation between $\mathbf{a}_n$ and $d\mathbf{l}$ in defining curl.

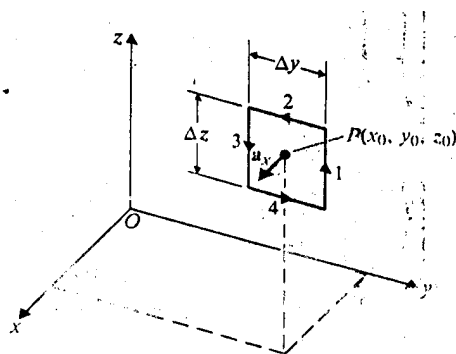


Fig. 2-24 Determining $(\nabla \times \mathbf{A})_x$.

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left[\oint_{\text{sides } 1,2,3,4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]$$

เนื่องจากในระบบพิกัดคาร์ทีเซียน $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{x}}A_x + \hat{\mathbf{y}}A_y + \hat{\mathbf{z}}A_z$,

Side 1: $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{z}}\Delta z$; $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_z(x_0, y_0 + \Delta y/2, z_0)\Delta z$

$$A_z\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) = A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.}$$

ดังนั้น

$$\int_{\text{side 1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.} \right\} \Delta z$$

Side 3: $d\mathbf{l} = -\hat{\mathbf{z}}\Delta z$; $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -A_z(x_0, y_0 - \Delta y/2, z_0)\Delta z$

$$A_z\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) = A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.}$$

ดังนั้น

$$\int_{\text{side 3}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = - \left\{ A_z(x_0, y_0, z_0) - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.} \right\} \Delta z$$

$$\text{และ } \int_{\text{side 1} + \text{side 3}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.} \right\} \Delta y \Delta z$$

เมื่อใช้วิธีเดียวกัน จะได้

$$\int_{\text{side 2} + \text{side 4}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left\{ -\frac{\partial A_y}{\partial z} \bigg|_{(x_0, y_0, z_0)} + \text{H.O.T.} \right\} \Delta y \Delta z$$

ดังนั้น

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

สามารถหา $(\nabla \times \mathbf{A})_y$, $(\nabla \times \mathbf{A})_z$ โดยใช้วิธีเดียวกัน ซึ่งจะได้ curl ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนดังนี้

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ จะเรียกว่า *irrotational (conservative) field* หรือ *curl-free* ในบางกรณี

2-9 STOKES' THEOREM

จากนิยามของ Curl จะได้

$$(\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

ถ้าแบ่งพื้นผิวออกเป็น N ส่วนย่อย เมื่อรวม
ส่วนย่อยทั้งหมดแล้ว จะได้

$$\lim_{\Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \lim_{\Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

โดยด้านซ้ายมือเท่ากับ

$$\lim_{\Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N (\nabla \times \mathbf{A})_j \cdot (\Delta \mathbf{s}_j) = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s}$$

และด้านขวามือเท่ากับ

$$\lim_{\Delta s_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

ดังนั้น จะได้ Stokes' theorem ดังต่อไปนี้

$$\boxed{\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}$$

ซึ่งหมายถึง

the surface integral of the curl of a vector field over an open surface is equal to the closed line integral of the vector along the contour bounding the surface

ในกรณีที่พื้นผิวปิด

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Example 2-16 Verify Stokes' theorem for the vector field in Example 2-14 over a quarter-circular disk.

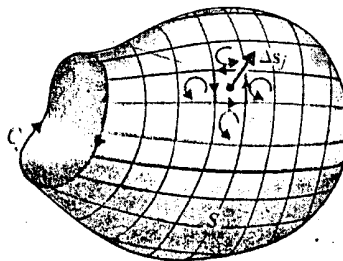


Fig. 2-25 Subdivided area for proof of Stokes's theorem.

2-10 TWO NULL IDENTITIES

1. $\nabla \times (\nabla V) \equiv \mathbf{0}$

จาก Stokes' theorem

$$\int_S [\nabla \times (\nabla V)] \cdot d\mathbf{s} = \oint_C (\nabla V) \cdot d\mathbf{l}$$

แต่เนื่องจาก $dV = \nabla V \cdot d\mathbf{l}$

$$\text{ทำให้ได้ } \oint_C (\nabla V) \cdot d\mathbf{l} = \oint_C dV = 0$$

ดังนั้น เมื่อเวกเตอร์เป็นแบบ Curl-free จะสามารถแสดงด้วย gradient ของสนามสเกลาร์ ยกตัวอย่างเช่น ถ้า

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ สามารถแสดง } \mathbf{E} \text{ ด้วย } \mathbf{E} = -\nabla V$$

2. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \equiv 0$

จาก divergence theorem

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dv = \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_n ds = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_{n1} ds + \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_{n2} ds = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ (ทั้งนี้ $\oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = 0$ เนื่องจาก S เป็นพื้นผิวปิด ดังกล่าวใน 2-9)

ดังนั้น เมื่อเวกเตอร์เป็น divergence-free

สามารถแสดงด้วย curl ของสนามเวกเตอร์

อื่น เช่น ถ้า $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ สามารถแสดง $\mathbf{B}$

$$\text{ด้วย } \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

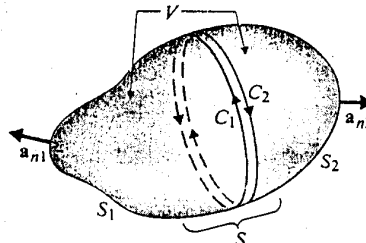


Fig. 2-26 An arbitrary volume V enclosed by surface S .

2-11 FIELD CLASSIFICATION AND HELMHOLTZ'S THEOREM

โดยทั่วไป สามารถจำแนกประเภทของสนามเวกเตอร์ได้ดังนี้

1. Solenoidal and irrotational ถ้า $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ and $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$
2. Solenoidal but not irrotational ถ้า $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ and $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$
3. Irrotational but not solenoidal ถ้า $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$ and $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$
4. Neither irrotational nor solenoidal ถ้า $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$ and $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$

ดังนั้น สนามเวกเตอร์โดยปกติจะมี Divergence และ Curl ที่ไม่เป็น 0 กล่าวคือ จะเป็นผลรวมของสนาม solenoidal และสนาม irrotational

Helmholtz's Theorem: A vector field is determined if both its divergence and its curl are specified everywhere.

กล่าวคือ ถ้าเรารู้ทั้ง divergence และ curl ของทุกจุดในสนามเวกเตอร์นั้น จะสามารถเจาะจงสนามเวกเตอร์ได้ ถ้ากำหนดให้เวกเตอร์ $\mathbf{F}$ เท่ากับ

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_s$$

โดยให้ $\mathbf{F}_i$ เป็นสนาม conservative (irrotational) และ $\mathbf{F}_s$ เป็นสนาม solenoidal จะเห็นว่า

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}_i + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = \nabla \cdot \mathbf{F}_i = g \Rightarrow \text{conservative (irrotational) field component}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}_i + \nabla \times \mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{F}_s = \mathbf{G} \Rightarrow \text{solenoidal field component}$$

Vector Calculus

ดังนั้น จำเป็นต้องรู้ทั้ง divergence และ curl ของสนามเวกเตอร์ ในทางฟิสิกส์ จะหมายถึงว่า ในการเจาะจงสนาม ได้ จำเป็นต้องรู้ทั้ง Flow source และ Vortex source

จากการที่ $\mathbf{F}_i$ เป็นสนาม conservative เราสามารถแสดงด้วย $\mathbf{F}_i = -\nabla V$ โดย V เป็นสเกลาร์ ในทำนองเดียวกัน

จากการที่ $\mathbf{F}_s$ เป็นสนาม solenoidal เราสามารถแสดงด้วย $\mathbf{F}_s = \nabla \times \mathbf{A}$ ดังนั้น

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_s = -\nabla V + \nabla \times \mathbf{A}$$

ในทางคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า มักเรียก $V, \mathbf{A}$ ว่า Scalar potential, Vector potential ตามลำดับ

Example Given $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}(3y - c_1 z) + \hat{\mathbf{y}}(c_2 x - 2z) - \hat{\mathbf{z}}(c_3 y + z)$

- Determine the constants c_1, c_2, c_3 if $\mathbf{F}$ is irrotational.
- Determine the scalar potential V whose negative gradient equals $\mathbf{F}$.