

Fourier series

วัตถุประสงค์

1. เข้าใจ Fourier series และสามารถใช้อุปกรณ์ Spectrum analyzer ได้

ทฤษฎี

Fourier Series

เราสามารถแทนสัญญาณรายคาบที่มีค่าจำกัด (Bounded Periodic Signal) ได้ด้วยผลรวมของสัญญาณ sinusoid ที่มีความถี่ต่าง ๆ ตาม Fourier Series ดังนี้

ถ้า $x(t)$ เป็น Bounded Periodic signal ที่มีความถี่ f_0 แล้ว เราสามารถหาค่าจำนวนจริง x_n และ p_n ที่สอดคล้องกับสมการข้างล่างนี้ได้

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos(2\pi f_0 t + p_n)$$

เรารู้แล้วว่าถ้า p เป็นจำนวนจริงใด ๆ $\cos p = \text{Re}[e^{jp}] = (e^{jp} + e^{-jp})/2$ ดังนั้นเราสามารถเขียน $x(t)$ ได้ใหม่ดังนี้

$$x(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x_n e^{jp_n}}{2} \right) e^{j2\pi f_0 t} + \left(\frac{x_n e^{-jp_n}}{2} \right) e^{-j2\pi f_0 t} \right]$$
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j2\pi f_0 t} \quad (1)$$

โดยที่ $X_0 = x_0$, $X_n = (x_n e^{jp_n})/2$ และ $X_{-n} = X_n^*$

เราจึงกล่าวได้ว่า $x(t)$ ประกอบไปด้วยสัญญาณ sinusoid ความถี่ $0, f_0, 2f_0, 3f_0, \dots$ ซึ่ง **Phasor ของสัญญาณ sinusoid นั้น ๆ ที่ความถี่ศูนย์มีค่า = X_0 และที่ความถี่ nf_0 โดยที่ $n > 0$ มีค่า = $2X_n$** และเราสามารถแก้สมการที่ 1 เพื่อหาค่า X_n ได้ตามสมการที่ 2

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} x(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \quad (2)$$

โดยที่ a คือจำนวนจริงใด ๆ และ T_0 คือคาบของ $x(t)$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $1/f_0$ และเราเรียก X_n เหล่านี้ว่า Exponential Fourier Coefficients

Spectrum analyzer

Spectrum analyzer คือเครื่องมือที่ใช้แสดง Amplitude spectrum ของสัญญาณโดยแกนนอนแสดงความถี่และแกนตั้งคือกำลังของสัญญาณ sinusoid ที่ความถี่ต่าง ๆ ในหน่วยของ dBm หรือ dBV เราอาจจะเลือกให้แสดงในรูปของแรงดันมีหน่วยเป็น V ก็ได้โดยมีความสัมพันธ์ระหว่าง P dBm และ แรงดัน V ดังนี้

$P \text{ dBm} = 10 \log \{ (V_{\text{rms}})^2 \times 10^3 / R \}$ โดยทั่วไป input impedance ของ Spectrum analyzer และ Source คือ 50Ω จึงใช้ $R = 50 \Omega$ เช่น Source จ่ายแรงดัน 0.223 V จะวัดได้ 0 dBm หรือ -13 dBV

หลักการทำงานของ Spectrum analyzer คือจะใช้ BPF ที่มีความถี่กลางคือ f_c และมี BW ที่แคบ ๆ กรองสัญญาณ input ที่ย่านความถี่นั้นแล้วแสดงผลทางหน้าจอทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ โดยเปลี่ยนความถี่กลางของ BPF จนกระทั่งครอบคลุมย่านการวัด

สำหรับระบบ LTI ถ้า input คือ $X(f)$, impulse response คือ $H(f)$ จะได้ output

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

ในกรณีนี้เมื่อคุณแล้วทำการ integrate สัญญาณที่กรองได้แล้วเลื่อนความถี่กลางของ $H(f)$ นั่นก็คือ

$$Y(f) = X(f) * H(f) \text{ นั่นเอง}$$

ในกรณีนี้ input คือ สัญญาณ sinusoid ซึ่งมีคู่ Fourier transform ดังนี้

$$A \cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow A(e^{j\phi}/2)\delta(f-f_c) + A(e^{-j\phi}/2)\delta(f+f_c)$$

สัญญาณที่ปรากฏที่หน้าจอคือ $|Y(f)|$

$$Y(f) = H(f) * [A(e^{j\phi}/2)\delta(f-f_c) + A(e^{-j\phi}/2)\delta(f+f_c)]$$

$$Y(f) = A(e^{j\phi}/2)H(f-f_c) + A(e^{-j\phi}/2)H(f+f_c)$$

นั่นคือแทนที่จะเห็นเป็น impulse ก็จะเห็นเป็น transfer function ของ BPF ค่า $|Y(f)|$ ที่แสดงทางจอภาพในแกน Y คือค่ากำลังของสัญญาณ sinusoid ที่มีความถี่ f_c

ในทางปฏิบัติจะไม่ได้มีการปรับความถี่กลางของ BPF แต่จะทำการแปลงความถี่ของสัญญาณ input ให้เลื่อนมาอยู่ในย่านความถี่ของ BPF เราเรียก BW ของ BPF นี้ว่า Resolution BW นั่นคือถ้า BW แคบก็วัดได้ละเอียดแต่การวัดจะช้าเพราะกว่าจะเลื่อนความถี่ให้ตลอดย่านการวัดเป็นไปได้ช้า

ในการใช้งาน Spectrum analyzer มี function ที่สำคัญ 4 อย่างคือ

- 1 Frequency คือการเลือกความถี่ที่จะแสดงผลที่ตำแหน่งกลางจอภาพ
- 2 Span คือการตั้งความถี่ต่อช่องที่จะแสดงในแนวแกน X
- 3 Amplitude คือการกำหนดว่าขอบบนสุดของจอภาพคือค่า Amplitude เท่าไรเพื่อจะใช้เป็นค่าอ้างอิง
- 4 BW คือการกำหนด BW ของ BPF ดังได้กล่าวมาแล้ว

ข้อควรระวัง

1. Spectrum analyzer ไม่สามารถวัดสัญญาณ DC ได้จึงไม่ควรป้อนสัญญาณ DC เข้าเครื่องวัด
2. ห้ามป้อนสัญญาณ input เกินที่กำหนดไว้

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

1. Oscilloscope เพื่อวัดสัญญาณใน Time domain
2. Spectrum analyzer เพื่อวัดสัญญาณใน Frequency domain
3. Function Generator เพื่อสร้างสัญญาณ

วิธีการทดลอง

ตอนที่1 Fourier Series

1. ใช้ Oscilloscope ต่อเข้ากับ Function generator วัดสัญญาณ $A \sin(2\pi 200kt)$ โดยที่ $A = 1 \text{ V}$
2. ต่อสัญญาณจาก Function generator ที่ตั้งไว้ตามข้อที่ 1 เข้า Spectrum analyzer บันทึกผลที่ได้ทั้งในหน่วย V และ dBm โดยปรับค่า A 0.5 และ 2 V ตามลำดับ
3. ทำซ้ำข้อ 2 โดยเปลี่ยนความถี่เป็น 100 k และ 300 k Hz
4. ป้อนสัญญาณ Pulse train ที่มี Amplitude 1 V , 50% duty cycle และ $f = 100 \text{ k Hz}$ ทำการบันทึกผลที่ได้ทั้งในหน่วย V และ dBm
5. ทำซ้ำข้อ 4 โดยเปลี่ยนความถี่เป็น 500k Hz
6. ทำซ้ำข้อ 4 แต่เปลี่ยนสัญญาณที่จะวัดเป็น 20% duty cycle