

Sampling theorem

วัตถุประสงค์

1. เข้าใจ Sampling theorem

ทฤษฎี

Sampling theorem

Sampling theorem กล่าวว่า ถ้าเราทราบว่าคุณลักษณะของสัญญาณอนาล็อกที่เราจะส่งประกอบไปด้วยความถี่ย่านใด หรือมี BW เท่าไร เราไม่จำเป็นต้องส่งสัญญาณที่ต่อเนื่องไปยังผู้รับ เราเพียงส่งค่าที่ได้จากการสุ่มสัญญาณอนาล็อก ด้วยอัตราการสุ่มมากกว่าหรือเท่ากับสองเท่าของ BW ของสัญญาณอนาล็อก โดยที่เครื่องรับเพียงแต่นำสัญญาณที่ได้รับ ไปผ่านวงจรกรองผ่านต่ำ (Low pass filter) ที่มี BW มากกว่าหรือเท่ากับสัญญาณอนาล็อกก็จะได้สัญญาณอนาล็อกที่ต่อเนื่อง

ในทางปฏิบัติเราแบ่งการ Sampling เป็นสองแบบคือ Natural sampling และ Flat-top sampling มีข้อแตกต่างดังนี้

Natural sampling

ทำได้ด้วยการคูณสัญญาณอนาล็อก $f(t)$ ที่ต้องการ Sampling ด้วย Pulse train $p(t)$ ซึ่งมี amplitude เป็น 1, คาบเป็น T_s และมี Pulse width เป็น τ จะได้ output

$$\begin{aligned}f_s(t) &= p(t)f(t) \\p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) * \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \\P(f) &= \frac{\tau}{T_s} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \\F_s(f) &= P(f) * F(f) \\F_s(f) &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi k f_s \tau)}{\pi k f_s \tau} F(f - k f_s)\end{aligned}$$

Flat-top sampling หรือ (Pulse Amplitude Modulation)PAM

หลักการคือเมื่อทำการสุ่มแล้วจะคงค่านั้นไว้เราจึงอาจกล่าวได้ว่า $f_s(t)$ ได้มาจากการสุ่มสัญญาณ $f(t)$ ด้วย impulse train แล้วป้อนผ่านระบบ LTI ที่มี $h(t) = \text{rect}(t/T)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}f_s(t) &= h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT_s) \\F_s(f) &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} F(f - k f_s)\end{aligned}$$

ถึงแม้ Flat-top sampling จะมีข้อเสียคือใน Frequency domain จะทำให้เกิด Amplitude distortion แต่ก็เป็นวิธีที่นิยมใช้ เพราะในการส่งสัญญาณแบบดิจิทัลเราต้องนำสัญญาณที่สุ่มได้ไปทำการเข้ารหัสเป็นสัญญาณดิจิทัลเราจึงต้องการเพียง 1 ค่าต่อการสุ่มหนึ่งครั้ง

จากผลที่ได้สรุปว่าเมื่อเราทำการสุ่มแล้วสัญญาณที่สุ่มได้ใน frequency domain จะประกอบด้วยสัญญาณ $F(f)$ อยู่ที่มีความถี่ 0, f_s , $2f_s$... โดยมีขนาดไม่คงที่ ถ้าเราทำการสุ่มด้วยอัตราการสุ่มที่ $\geq 2W$ เมื่อ W คือ BW ของ $F(f)$ เราสามารถใช้ LPF กรองสัญญาณ $F(f)$ กลับคืนมาได้

อุปกรณ์ที่ใช้ในการทดลอง

1. Modicom1
2. Oscilloscope
3. Spectrum analyzer
4. Function Generator
5. DC Power supply

วิธีการทดลอง

Sampling theorem

ในระหว่างการต่อวงจรให้ปิด **Power supply** ทุกครั้ง

1. ต่อไฟเลี้ยงเข้า Modicom1 ตั้ง Sampling control switch ไปที่ 'internal'
2. ตั้งความถี่ของสัญญาณ Sampling (p(t)) เป็น 32 kHz โดยตั้งเป็น 320 kHz (ผ่านวงจรหาร 10 ภายหลัง) และ Duty cycle เป็น 1
3. ป้อนสัญญาณ sine ที่มี V_p เป็น 1 V และ $f = 12$ kHz เข้าที่ Analog input ของ Modicom 1 บันทึกสัญญาณ sample output และ sample/hold output ทั้งใน f domain และ t domain
4. ทำซ้ำในข้อ 2-3 โดยตั้ง Duty cycle เป็น 5
5. ทำซ้ำในข้อ 2-3 โดยตั้ง Duty cycle เป็น 1 แต่ป้อนสัญญาณ sine ที่มี V_p เป็น 1 V และ $f = 20$ kHz
6. ทำซ้ำในข้อ 2-3 โดยปรับความถี่ของสัญญาณ Sampling (p(t)) เป็น 160 kHz
7. ที่ Modicom1 ต่อสัญญาณ 1 kHz (จุด 7) เข้า Analog input
8. ต่อ sample output ไปที่ Fourth order LPF และ Second order LPF
9. ตั้ง Duty cycle เป็น 1 เปลี่ยน sampling frequency 2k, 4k, 8k, 16k และ 32kHz แล้วบันทึกผลที่ได้
10. ทำซ้ำข้อ 8-10 โดยข้อ 8 เปลี่ยนจาก sample output เป็น sample/hold output