

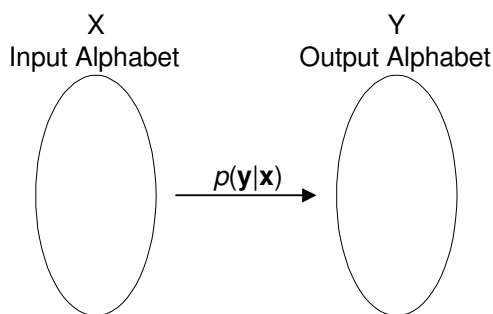
Channel Coding

1 Modeling of Communication Channels

Communication Channel หมายถึง สื่อกลางที่จะใช้ในการส่งข่าวสารระหว่างผู้ส่ง กับผู้รับ ซึ่งประกอบด้วยแบบ Guided (เช่น UTP, Coaxial Cable, Optical Fiber) และ Unguided (เช่น Terrestrial Microwave, Satellite Microwave, Broadcast Radio, Infrared, etc.) ไม่ว่าจะเป็นแบบไหน สิ่งเหมือนกันก็คือ จะมีหน้าที่รับ Input เข้ามาจาก Source แล้วส่ง Output ให้กับ Destination โดยทั่วไป มีส่วนประกอบหลายอย่างที่มีผลทำให้ Output แตกต่างไปจาก Input อาทิเช่น Attenuation, Noise, Nonlinearity, bandwidth limitation, multipath propagation

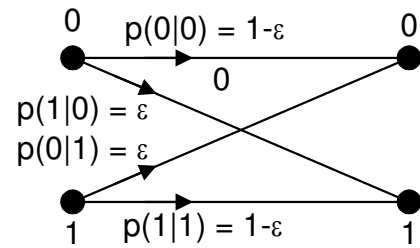
Discrete channel หมายถึง discrete-time channel (channel ที่ใช้การส่งข้อมูลแบบ discrete) ที่ค่าที่ Input และ Output สามารถเป็นไปได้ มีจำกัด อย่างเช่น binary-input binary-output channel เป็นต้น ซึ่งสามารถแสดงได้ตามรูปที่ 1 โดยทั่วไป Output y_i จะขึ้นกับทั้ง Input ณ เวลานั้น x_i และ Input ก่อนหน้าหรือหลังจากนั้น ในกรณีนี้ เราเรียกว่า channel นี้ มี Memory กรณีที่ไม่เป็นเช่นนั้น เราเรียก Channel นี้ว่าเป็น *discrete-memoryless channel* ซึ่งสามารถแสดง $p(Y|X)$ ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$p(Y|X) = \prod_{i=1}^n p(y_i|x_i) \quad (1)$$



รูปที่ 1 A discrete channel

ตัวอย่างของ *discrete-memoryless channel* ได้แก่ *binary-symmetric channel* (รูปที่ 2) โดยเรียกค่า ϵ ว่า *crossover probability*



รูปที่ 2 binary-symmetric channel

Alphabet Channel ที่สำคัญอันหนึ่งได้แก่ *discrete-time, additive white Gaussian noise channel* ที่มีข้อจำกัดของค่า input power ดังแสดงได้ตามรูปที่ 3 ความสัมพันธ์ระหว่าง input-output สามารถแสดงได้ตามสมการต่อไปนี้

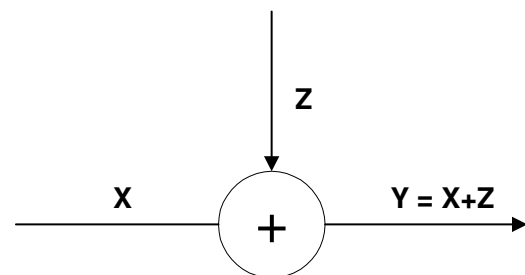
$$Y = X + Z \quad (2)$$

โดยให้ Z เป็น channel noise

เงื่อนไขข้อจำกัดของ input power เมื่อมี input เป็นจำนวนมาก สามารถแสดงได้เป็น

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq P \quad (3)$$

โดยให้ n แทนจำนวน และ P เป็นค่า Power



รูปที่ 3 Additive white Gaussian noise Channel

2 Channel Capacity

noisy channel coding theorem (Shannon, 1948) : the basic limitation that noise causes in a communication channel is not on the reliability of communication, but on the speed of communication.

ตัวอย่าง กรณี Binary-symmetric channel ถ้าเราส่งข้อมูล X^n ที่มีความยาว n และได้ Output เป็น Y^n ถ้าหาก n มีจำนวนมาก จำนวนตำแหน่งที่แตกต่างกันระหว่าง Input กับ Output จะเท่ากับ $n\epsilon$ ซึ่งจำนวนของข้อมูลที่เป็นแบบดังกล่าวนี้ จะเท่ากับ $\binom{n}{n\epsilon}$

เราสามารถหาค่าดังกล่าวนี้ได้จาก

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \epsilon^k (1-\epsilon)^{n-k} = 1 \quad (4)$$

ถ้ากำหนดให้ k เป็น $n\epsilon$ และหาเฉพาะตำแหน่งที่ k เราจะได้

$$\begin{aligned} 1 &\geq \binom{n}{n\epsilon} \epsilon^{n\epsilon} (1-\epsilon)^{n-n\epsilon} \\ &= \binom{n}{n\epsilon} 2^{n\epsilon \log \epsilon + (n-n\epsilon) \log (1-\epsilon)} \\ &= \binom{n}{n\epsilon} 2^{-nH_b(\epsilon)} \end{aligned} \quad (5)$$

แต่เนื่องจาก n มีจำนวนมาก และความน่าจะเป็นที่จะมี Output ที่ต่างจาก Input เป็นจำนวน $n\epsilon$ ตำแหน่งเท่านั้น จะเข้าใกล้ 1 ดังนั้นเราสามารถประมาณได้ตามสมการต่อไปนี้

$$\binom{n}{n\epsilon} \approx 2^{nH_b(\epsilon)} \quad (6)$$

เพราะฉะนั้น จำนวน input sequence ที่จะทำให้ Output sequence ไม่ซ้ำกัน จะเท่ากับ

$$M = \frac{2^{nH(Y)}}{2^{nH_b(\epsilon)}} = 2^{n(H(Y)-H_b(\epsilon))} \quad (7)$$

และ transmission rate per channel use จะเท่ากับ

$$R = \frac{\log M}{n} = H(Y) - H_b(\epsilon) \quad (8)$$

เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้ตามรูปที่ 4

ค่า R จะสูงสุดก็ต่อเมื่อ $H(Y)$ มีค่าสูงสุด หรือ เท่ากับ 1 ($p(Y=0) = p(Y=1) = 0.5$)

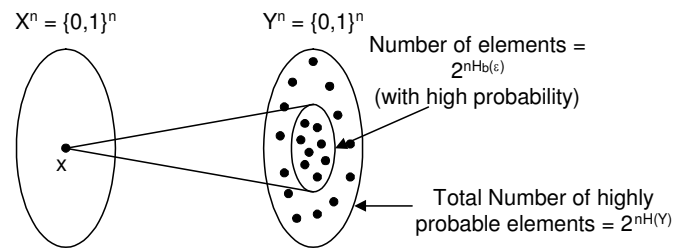
$$H(Y) = 1 \quad (9)$$

ดังนั้น จากสมการ (8) เราจะได้

$$R = 1 - H_b(\epsilon) \quad (10)$$

จะสังเกตได้ว่า R จะมีค่ามากที่สุด เมื่อ ϵ เท่ากับ 0 หรือ 1 และมีน้อยที่สุดเมื่อ ϵ มีค่าเท่ากับ 0.5

เราเรียก ค่า Maximum Rate ที่เราสามารถสื่อสารบน discrete-memoryless channel โดยมีความน่าจะเป็นที่จะเกิด Error เข้าใกล้ 0 ว่า Channel Capacity และแทนด้วยสัญลักษณ์ C



รูปที่ 4 Schematic Representation of a BSC

Mutual Information

Mutual Information ระหว่าง X กับ Y เป็นค่าแสดงความไม่แน่นอนของ X ที่ลดลงหลังจากได้รับข่าวสาร Y ดังแสดงได้ตามสมการที่ 11

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (11)$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้ากำหนดให้ X, Y เป็น binary random variables ที่มีค่า $p(X=0, Y=0) = 1/3, p(X=1, Y=0) = 1/3, p(X=0, Y=1) = 1/3$ จงหา $I(X; Y)$

วิธีทำ $p(X=0) = p(Y=0) = 2/3$ ดังนั้น $H(X) = H(Y) = H_b(2/3) = 0.919$

$(X, Y) = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ มีค่าความน่าจะเป็นเท่ากัน ดังนั้น $H(X, Y) = \log 3 = 1.585$

$$H(X|Y) = H(X, Y) - H(Y) = 1.585 - 0.919 = 0.666$$

$$\therefore I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.919 - 0.666 = 0.253$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าให้ X แทนสภาพอากาศที่เกิดขึ้นจริง และ Y แทนพยากรณ์อากาศ และมีความน่าจะเป็นตามตารางที่ 1 จงหา $I(X; Y)$

ตารางที่ 1 ตัวอย่างความน่าจะเป็นของสภาพอากาศที่เกิดขึ้นจริง กับพยากรณ์อากาศ

$P(x,y)$		Y		$P(x)$
		Fine	Rain	
X	Fine	0.45	0.12	0.57
	Rain	0.15	0.28	0.43
$P(y)$		0.60	0.40	

วิธีทำ ก่อนอื่น คำนวณหาค่า $H(X)$

$$H(X) = H_2(0.57) = 0.986 \text{ Bit}$$

ต่อมา ทำการคำนวณหาค่า $P(x|y)$ โดยใช้สมการ

$$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)} \quad (12)$$

ซึ่งจะได้ตามตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ตัวอย่างการคำนวณหาค่า $P(x|y)$

$P(x y)$		Y	
		Fine	Rain
X	Fine	0.75	0.30
	Rain	0.25	0.70

ดังนั้น $H(X| \text{Fine}) = H_2(0.75) = 0.811 \text{ Bit}$

$$H(X| \text{Rain}) = H_2(0.70) = 0.881 \text{ Bit}$$

ความน่าจะเป็นของพยากรณ์อากาศ Fine และ Rain มีค่าเท่ากับ 0.60 และ 0.40 ตามลำดับ ดังนั้น

$$H(X|Y) = 0.60 \times 0.811 + 0.40 \times 0.881 = 0.839 \text{ Bit}$$

เพราะฉะนั้น

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.986 - 0.839 = 0.147 \text{ Bit}$$

กล่าวคือ การรับฟังพยากรณ์อากาศ ทำให้ความไม่แน่นอนลดลง 0.147 Bit หรือได้รับข่าวสารโดยเฉลี่ย เท่ากับปริมาณ 0.147 Bit

คุณสมบัติของ Mutual Information ที่ควรรู้

$$1. I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

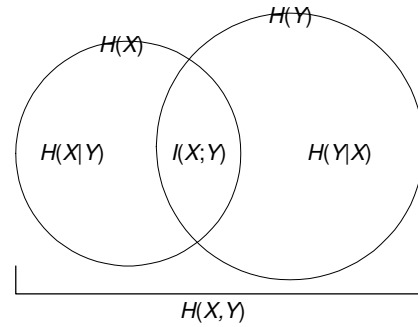
$$2. I(X;Y) = \sum_{x,y} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}$$

$$3. I(X;Y) \leq \min(H(X), H(Y))$$

$$4. I(X;Y) \geq 0$$

Equality ในข้อ 4 เป็นจริงเฉพาะกรณี X กับ Y เป็นอิสระต่อกัน

ความสัมพันธ์ระหว่าง $H(X)$, $H(Y)$, $H(X|Y)$, $H(Y|X)$ และ $I(X;Y)$ สามารถได้แสดงได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5 ความสัมพันธ์ระหว่าง Entropy กับ Mutual Information

Noisy Channel Coding Theorem

ในปี 1948 Shannon ได้ค้นพบทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับ Noisy Channel Coding ซึ่งสามารถสรุปใจความได้ดังต่อไปนี้

[Noisy Channel Coding Theorem] The capacity of a discrete-memoryless channel is given by

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) \quad (13)$$

where $I(X;Y)$ is the mutual information between the channel input X and the output Y .

โดยสรุปแล้ว ก็คือ ถ้าความเร็วในการส่ง R ต่ำกว่า C เราจะสามารถส่งข้อมูลที่มีความยาว n โดยให้มีความน่าจะเป็นที่จะเกิด Error ต่ำกว่า $\forall \epsilon > 0$ (กล่าวคือ สามารถทำให้ไม่มี Error เกิดขึ้นได้)

ตัวอย่างที่ 3 ตัวอย่างการคำนวณ Channel Capacity

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$H(Y|X) = p(X=a)H(Y|X=a) + p(X=b)H(Y|X=b) +$$

$$p(X=c)H(Y|X=c)$$

$$H(Y|X=a) = H(Y|X=b) = H(Y|X=c) = 1.5$$

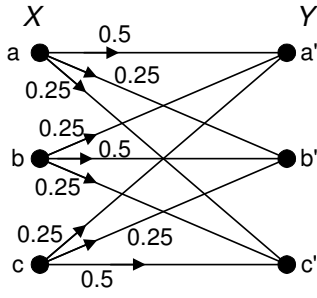
$$\therefore H(Y|X) = 1.5$$

$$I(X;Y) = H(Y) - 1.5$$

$H(Y)$ is maximum when Y is an equiprobable random variable. $\rightarrow$

$$H(Y) = \log 3 = 1.585$$

$$\therefore C = 1.585 - 1.5 = 0.085 \text{ bits/transmission}$$



รูปที่ 6 Discrete-memoryless Channel ในตัวอย่างที่ 3

3 Gaussian Channel Capacity

กรณี Gaussian Channel ความสัมพันธ์ระหว่าง Input-Output และเงื่อนไขข้อจำกัดของ Input Power สามารถแสดงได้ดังสมการ (2) และ (3) โดย Z เป็น Gaussian random variable ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และ Variance เป็น P_N

กรณีที่ Input เป็น sequence ที่มีความยาว n เราจะได้

$$y = x + z \quad (14)$$

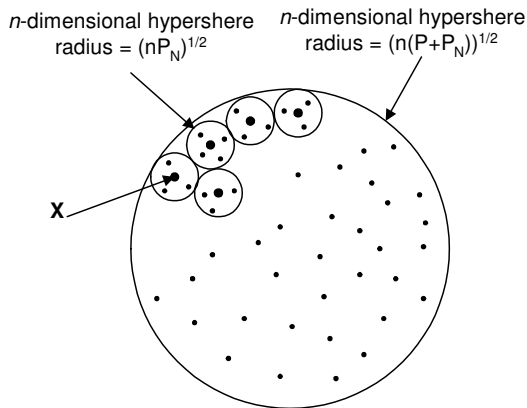
$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y - x|^2 \leq P_N \quad (15) \text{ หรือ}$$

$$|y - x|^2 \leq nP_N \quad (16)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq P + P_N \quad (17) \text{ หรือ}$$

$$|y|^2 \leq n(P + P_N) \quad (18)$$

เราสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 7



รูปที่ 7 Output Sequences of a Gaussian channel with power constraint

ปริมาตรของ n -dimensional hypersphere เท่ากับ $K_n R^n$ โดย R เป็นรัศมี และ K_n ไม่ขึ้นกับ R

ดังนั้น จำนวนข้อความที่สามารถส่งได้อย่างมีความน่าเชื่อถือ จะเท่ากับ

$$M = \frac{K_n (n(P + P_N))^{\frac{n}{2}}}{K_n (nP_N)^{\frac{n}{2}}} \quad (19)$$

$$= \left(\frac{P + P_N}{P_N} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{P}{P_N} \right)^{\frac{n}{2}}$$

ดังนั้น Capacity ของ Channel นี้จะเท่ากับ

$$C = \frac{1}{n} \log M = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \log \left(1 + \frac{P}{P_N} \right) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{P}{P_N} \right) \quad (20)$$

ซึ่งมีหน่วยเป็น bits/transmission

P/P_N คืออัตราส่วนระหว่าง Power ของ Input หรือ signal กับ Power ของ Noise ซึ่งเราสามารถแทนด้วย S/N และคูณด้วย 2W (Nyquist Rate $C = 2W$ เมื่อ W เป็น Bandwidth) ทำให้เราได้ Capacity [bits/sec] ดังต่อไปนี้

$$C = W \log \left(1 + \frac{S}{N} \right) \quad (21)$$

สมการ (21) นี้ เป็นสมการของ Shannon สำหรับ Capacity ของ Additive White Gaussian Noise Channel (AWGN)

4 Error Detection & Correction Code

แนวคิด ส่งข้อความที่ต้องการ (Information bit, Information sequence) กับข้อความสำหรับตรวจสอบและแก้ไข Error (Parity Check bit, Parity Check sequence) รวมอยู่ในข้อความที่ส่ง (เรียกว่า codeword) ในกรณีของ Linear Block Code จะอยู่ในรูปของ (n, k) block code กล่าวคือ Information sequence จะมีความยาว k bits และ codeword จะมีความยาวทั้งหมด n bits (parity check sequence มีความยาว $n-k$ bits) ในกรณีนี้ ประสิทธิภาพของ Code (Code Efficiency) จะเท่ากับ

$$\eta = \frac{k}{n} \quad (22)$$

โดยทั่วไป นิยมทำให้อยู่ในลักษณะนำ Parity Check sequence มาต่อกับ Parity Check sequence ซึ่งเราเรียก code ในลักษณะนี้ว่า systematic code

5 Linear Block Code

(n,k) block code ถูกกำหนดโดย $M = 2^k$ sequences ที่มีความยาว n ซึ่งเรียกว่า *Code word* code C ที่ประกอบด้วย M code word แสดงโดย

$C = \{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ โดย codeword ทุกอันมีความยาว n และแต่ละตัวประกอบเป็น 0 หรือ 1

นิยามของ Linear Block Code C เป็น Linear Block Code เมื่อ c_i , c_j เป็น Linear Block Code และ $c_i \oplus c_j$ เป็น Linear Block Code โดย $\oplus$ แทนการบวกแบบ Modulo-2 (หลังจากนี้ ใช้สัญลักษณ์ +)

Hamming Distance จำนวนตัวประกอบที่แตกต่างกันของ c_i, c_j แสดงด้วยสัญลักษณ์ $d(c_i, c_j)$

Hamming Weight จำนวนตัวประกอบที่ไม่ใช่ 0 ของ c_i แสดงด้วยสัญลักษณ์ $w(c_i)$

Minimum Distance

$$d_{\min} = \min_{\substack{i \neq j \\ c_i, c_j}} d(c_i, c_j) \quad (23)$$

Minimum Weight

$$w_{\min} = \min_{c_i \neq 0} w(c_i) \quad (24)$$

กรณีที่ เป็น Linear Code $d_{\min} = w_{\min}$

6 (7,4) Hamming Code

Information sequence 4 bits: x_1, x_2, x_3, x_4

Parity Check sequence 3 bits : c_1, c_2, c_3

$$\begin{aligned} c_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 &= x_2 + x_3 + x_4 \\ c_3 &= x_1 + x_2 + x_4 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{Codeword 7 bits : } w = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3) \quad (26)$$

Information sequence 4 bits -> codeword ทั้งหมด $2^4 = 16$ (ตารางที่ 3)

ตารางที่ 3 (7,4) Hamming Code

x_1	x_2	x_3	x_4	c_1	c_2	c_3	x_1	x_2	x_3	x_4	c_1	c_2	c_3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1

0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1

ถ้าเราแทนค่า w เข้าไปในสมการ (25) เราจะได้

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_5 &= 0 \\ w_2 + w_3 + w_4 + w_6 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$w_1 + w_2 + w_4 + w_7 = 0$$

เราเรียก สมการ (27) นี้ว่า Parity Check Equation

ในกรณีที่ เกิด Error เข้ามาใน transmission channel (รูปที่ 3) y จะเท่ากับ $w + e$ (e เป็น error pattern) เมื่อแทนค่า y ในสมการ (27) แล้วเราจะได้

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + y_5 &= s_1 \\ y_2 + y_3 + y_4 + y_6 &= s_2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$y_1 + y_2 + y_4 + y_7 = s_3$$

$S = (s_1, s_2, s_3)$ นี้จะมีค่าแตกต่างกันไป ตาม Error Pattern ซึ่งเราเรียกว่า เป็น Syndrome ของ channel output y จากสมการ (27) และ (28) เราจะได้

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 + e_5 &= s_1 \\ e_2 + e_3 + e_4 + e_6 &= s_2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$e_1 + e_2 + e_4 + e_7 = s_3$$

ในกรณีที่ มี Error 1 ตำแหน่ง Syndrome จะเป็นไปตามตารางที่ 4

ตารางที่ 4 Syndrome

Error Pattern							Syndrome		
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	s_1	s_2	s_3
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Generator and Parity Check Matrices

จากสมการ (25), (26) ถ้าเรากำหนด Matrix G ดังต่อไปนี้

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

เราจะสามารถสร้าง w ให้อยู่ในรูปผลคูณของ Matrix ดังต่อไปนี้

$$w = xG \quad (31)$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ เราเรียก Matrix G ว่าเป็น Generator Matrix

และจากสมการ (26) ถ้าเรากำหนด Matrix H

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

เราสามารถเขียนสมการ (27) ให้อยู่ในรูปผลคูณของ Matrix

$$wH^T = 0 \quad (33)$$

H^T เป็น Transpose ของ H ซึ่งเราเรียก Matrix H ว่า Parity Check Matrix

ถ้าใช้ H เราจะสามารถแสดงสมการ (28) ในรูป

$$s = yH^T \quad (34)$$

$$s = (s_1, s_2, s_3)$$

$$s = yH^T = (w+e)H^T = wH^T + eH^T = eH^T \quad (35)$$

หรือสมการ (29) นั่นเอง

7 General Hamming Code

(n,k) Hamming Code มีคุณสมบัติต่อไปนี้

Codeword Length : $n = 2^m - 1$

Information Sequence : $k = 2^m - 1 - m$

Parity Check Sequence : $m = n - k$

$$c_i = \begin{cases} x_i & 1 \leq i \leq k \\ \sum_{j=1}^k p_{ji} x_j & k+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (36)$$

Generator Matrix :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ & 1 & \mathbf{0} & & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ & \mathbf{0} & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{nk} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$k \times k$ $k \times m$

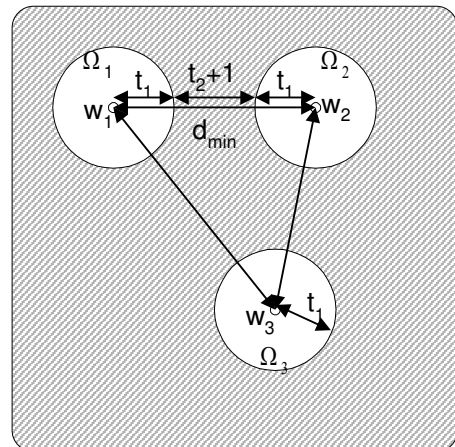
Parity Check Matrix :

$$H = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{k1} & 1 & & & \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{k2} & & 1 & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathbf{0} & \ddots & \\ p_{1m} & p_{2m} & \cdots & p_{km} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$m \times k$ $m \times m$

8 Minimum distance and Error Correcting

เราสามารถจำลอง Output Sequence ให้เป็นรูป space ตามรูปที่ 8 โดยแต่ละ Output Sequence จะมีลักษณะเหมือนเป็นทรงกลมที่มี codeword เป็นจุดศูนย์กลาง ระยะทางระหว่างแต่ละ Output Sequence เป็น Hamming Distance



รูปที่ 8 Output Sequence Space

1. เงื่อนไขการแก้ไข Error

ถ้าทรงกลมทุกอันไม่มีส่วนที่ทับกัน เราจะสามารถหา codeword ที่ถูกต้องได้ กล่าวคือ เราจะสามารถแก้ไข Error ได้

$$d_{\min} \geq 2t_1 + 1 \quad (39)$$

โดย t_1 จะเป็นจำนวน Error ที่สามารถแก้ไขได้

ค่าสูงสุดของ t_1 เท่ากับ

$$t_0 = \lfloor (d_{\min} - 1) / 2 \rfloor \quad (40)$$

ดังนั้น สามารถแก้ไข Error จำนวนต่ำกว่า t_0 ได้

2. เงื่อนไขการตรวจสอบ Error

ถ้าทรงกลมที่มีรัศมี $t_1 + t_2$ ไม่ทับกับทรงกลมอื่นใด เราสามารถตรวจสอบว่ามี Error เกิดขึ้นได้

$$t_2 + 1 = d_{\min} - 2t_1 \quad (41)$$

ถ้า $t_2 \geq 1$ เราสามารถตรวจสอบว่ามี Error จำนวนตั้งแต่ $t_1 + 1$ ถึง $t_1 + t_2$ ได้ แต่ไม่สามารถแก้ไขได้

ตัวอย่างที่ 4 (7,4) Hamming Code

$d_{\min} = w_{\min} = 3$ ดังนั้น สามารถแก้ไข Error ได้ 1 ตัว